МАОУ Вторая гимназия

Предметно-методическая мастерская
«Решение задач по планиметрии в курсе ЕГЭ»

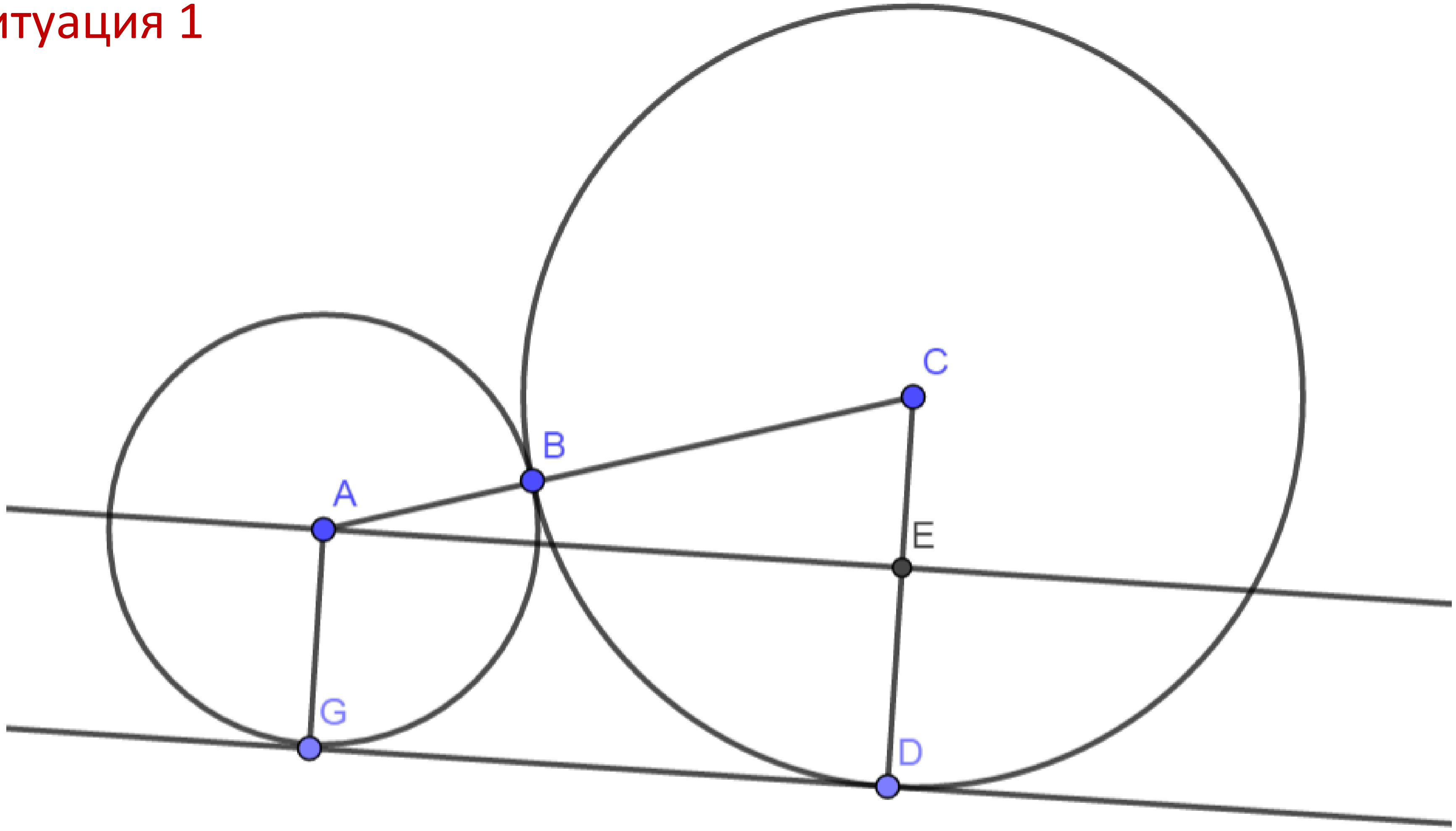
- Попова О.В., учитель математики высшей квалификационной категории
- Макарова С.А., учитель математики высшей квалификационной категории

Занятие № 4

«Окружность»

(основные ситуации и конструкции)

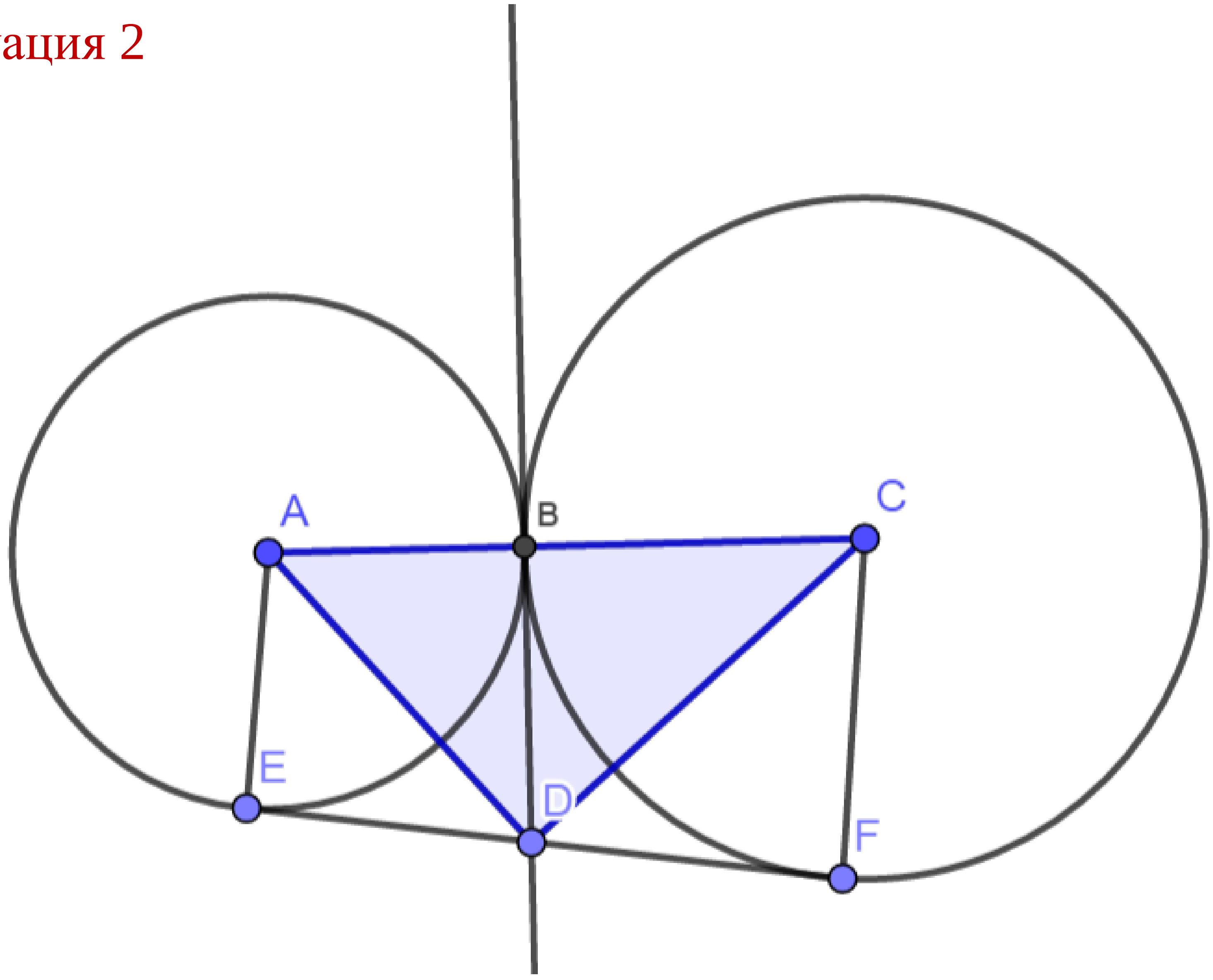
Ситуация 1



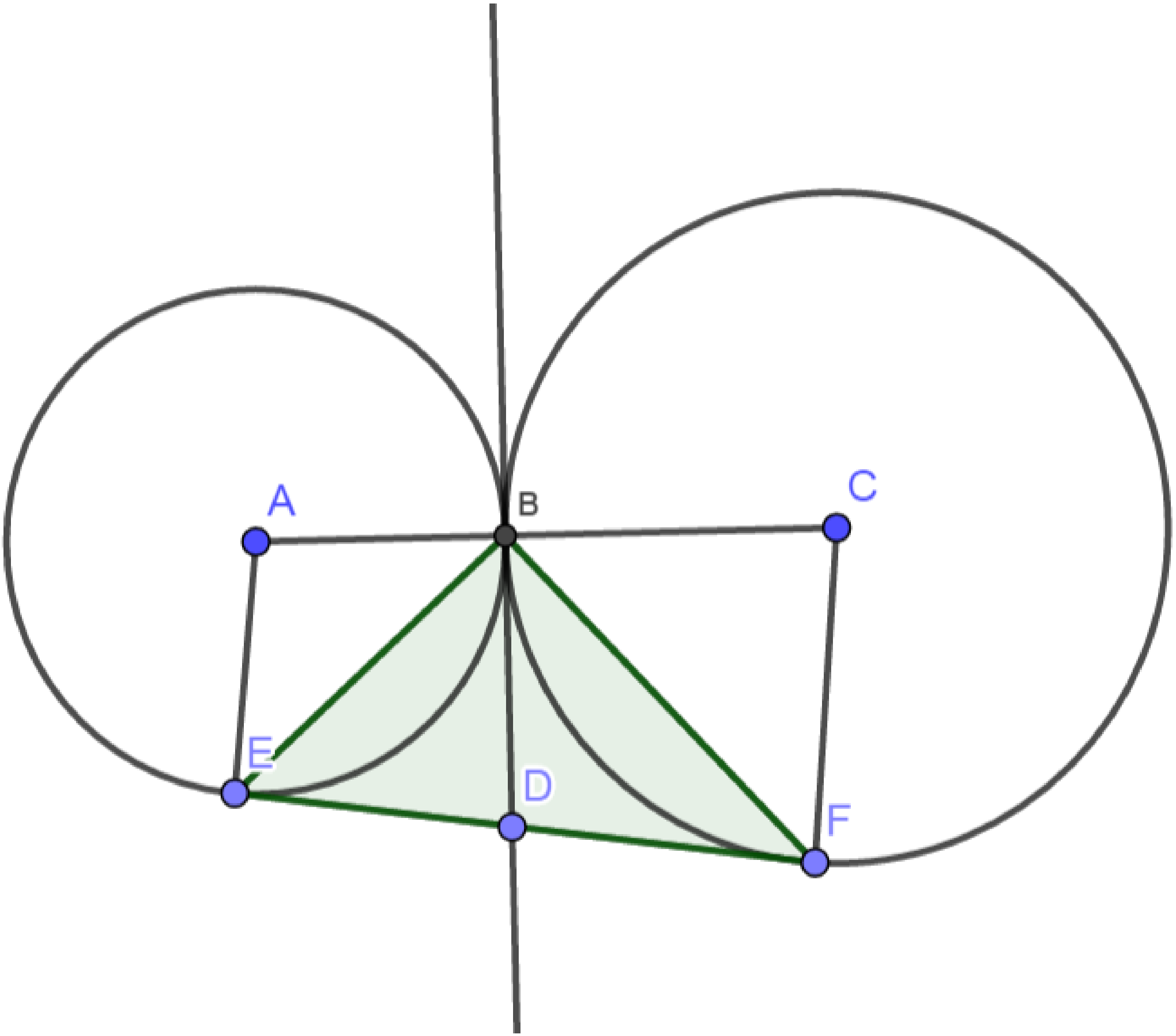
r =2, R=3

1. Найти GD
2. Найти BD
3. Найти GB

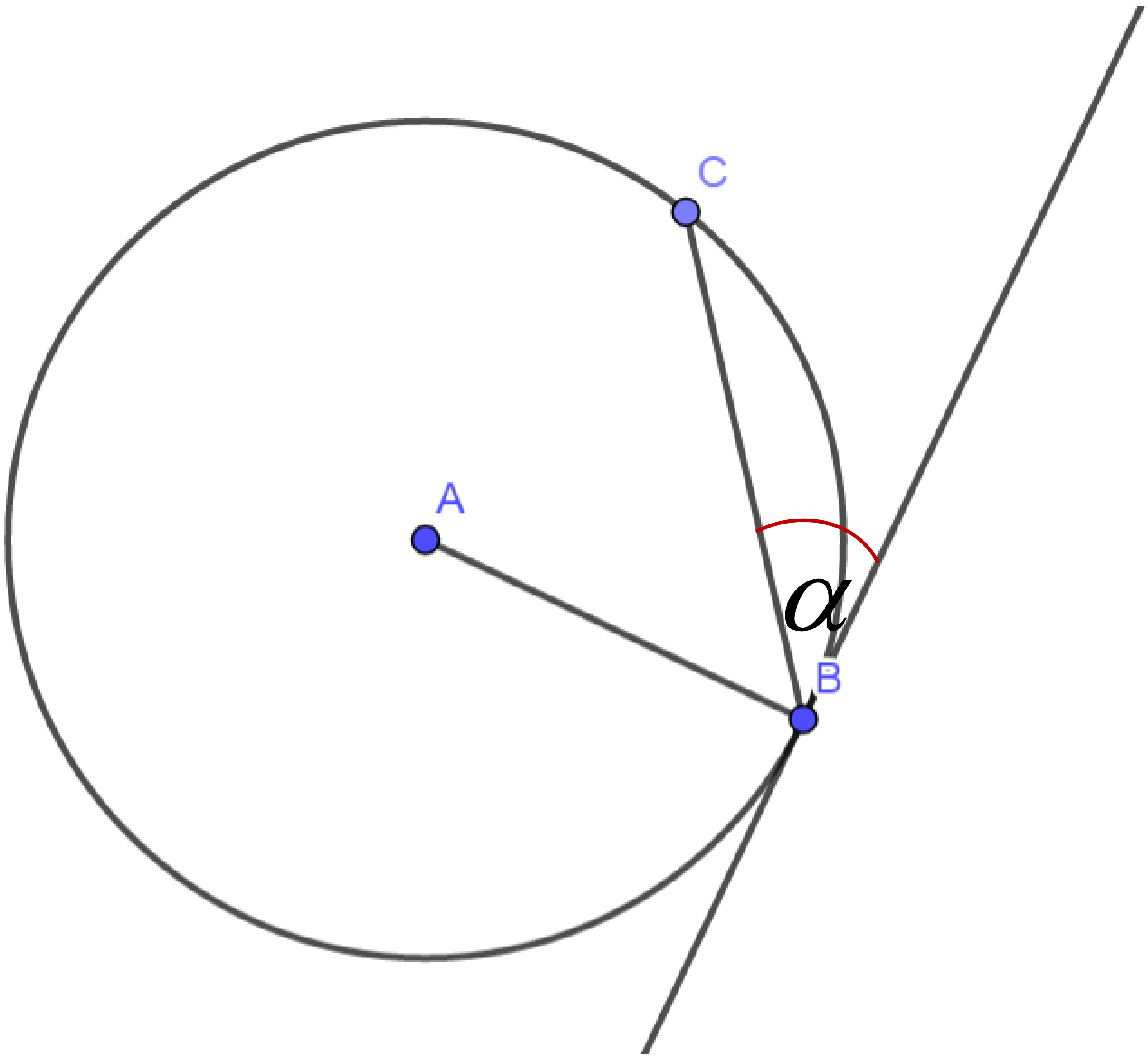
Ситуация 2



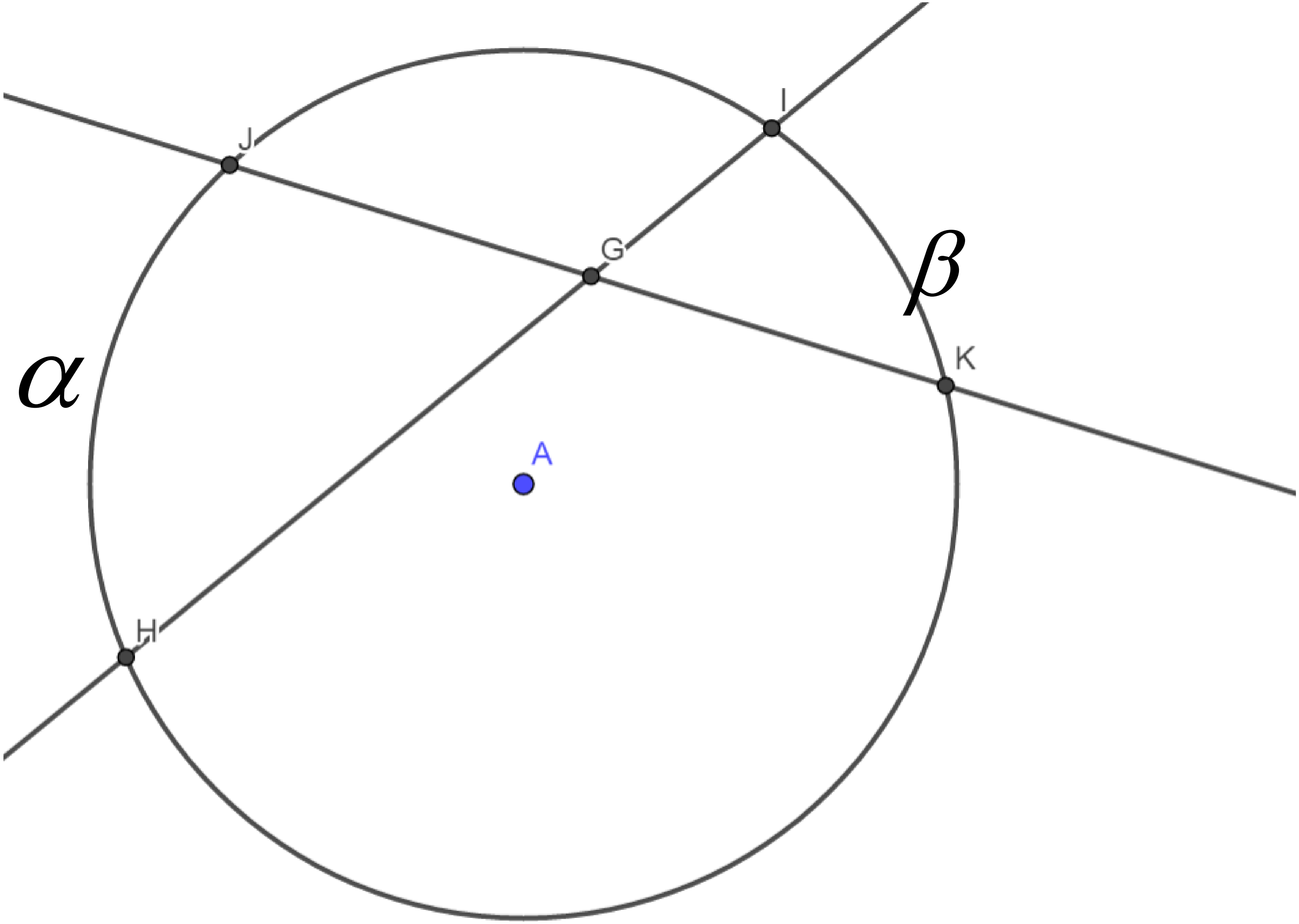
Ситуация 3



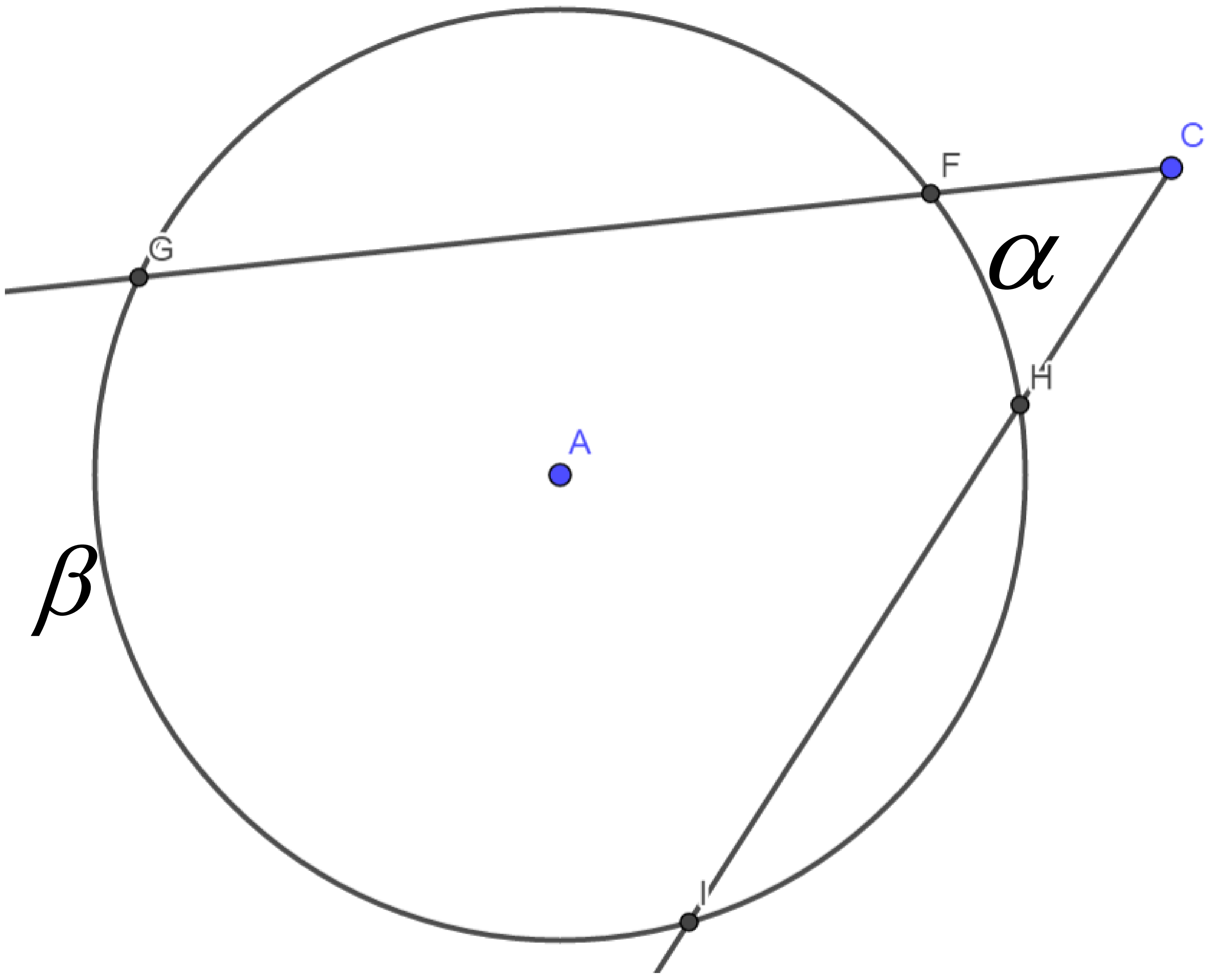
Ситуация 4



Ситуация 5

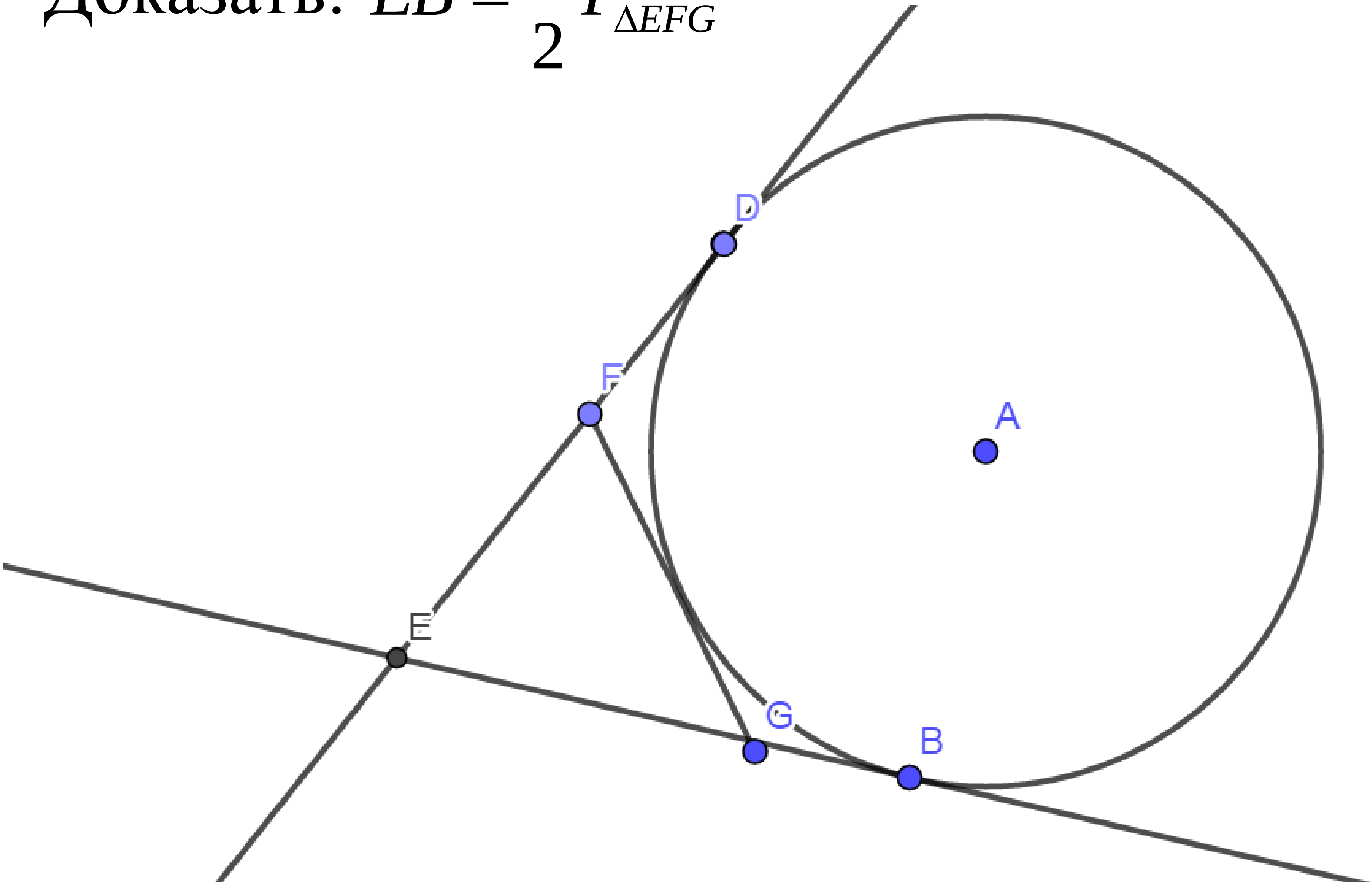


Ситуация 6



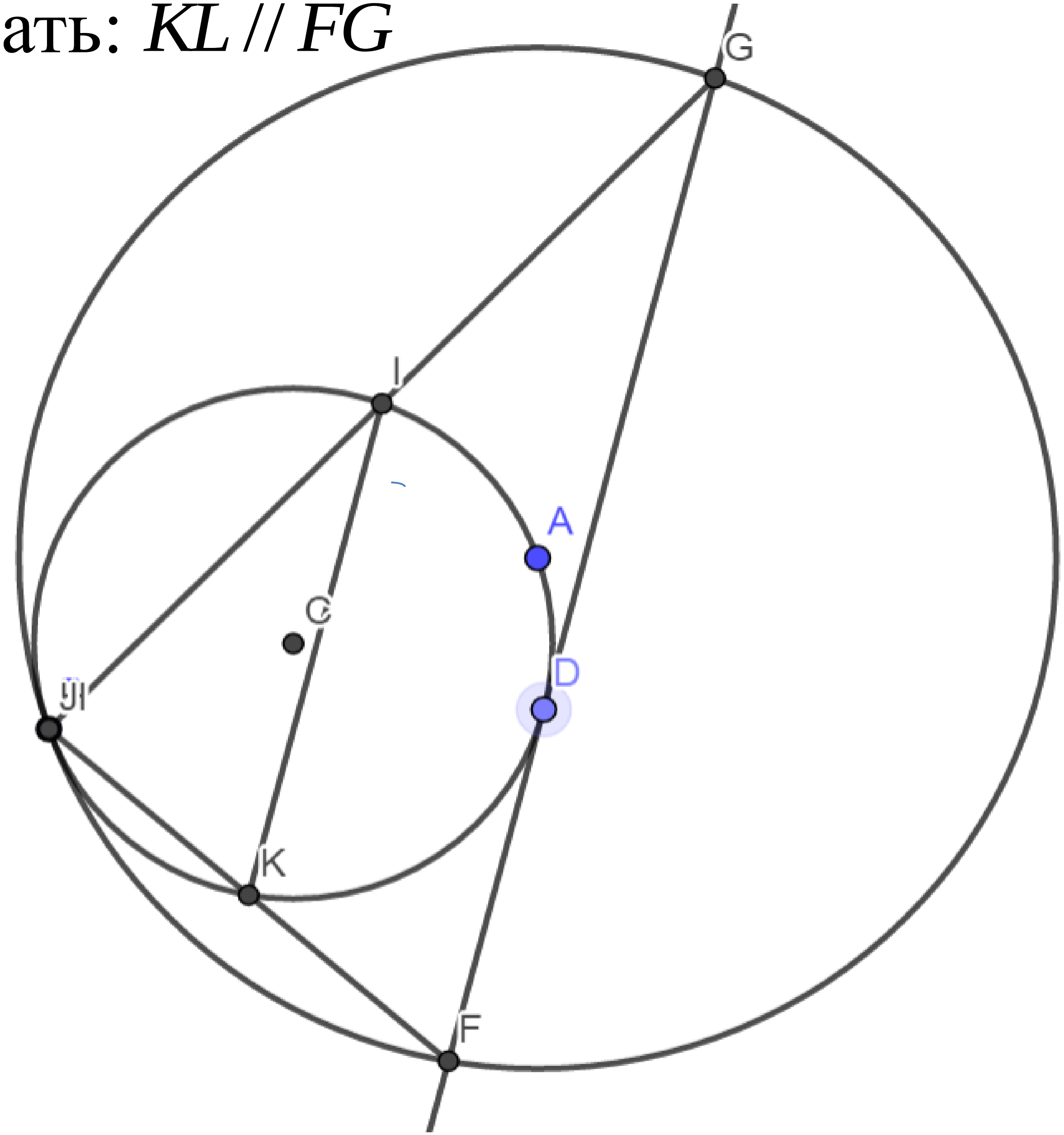
Ситуация 7

Доказать: $EB = \frac{1}{2} P_{\Delta EFG}$

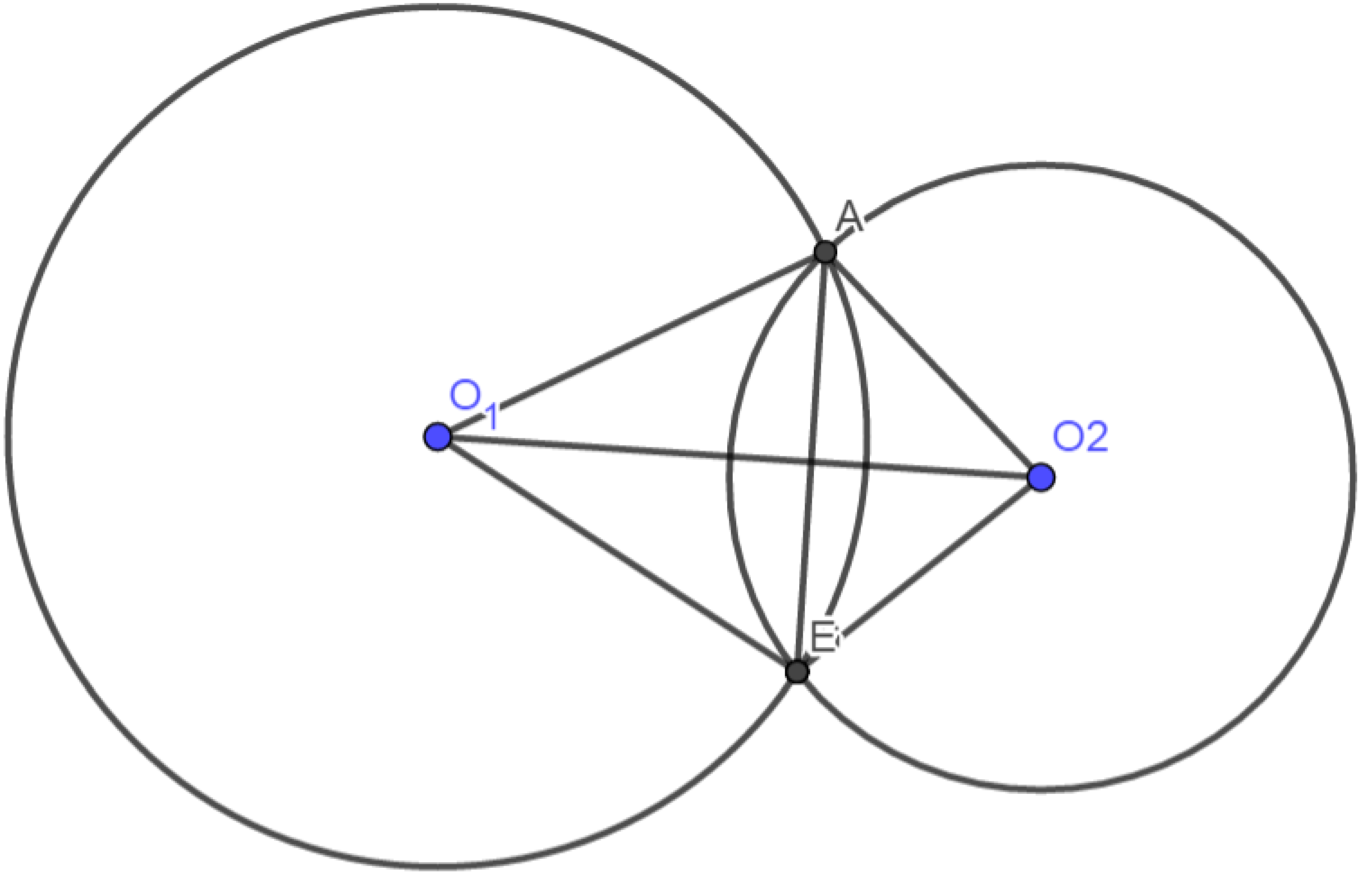


Ситуация 8

Доказать: $KL \parallel FG$



Ситуация 9

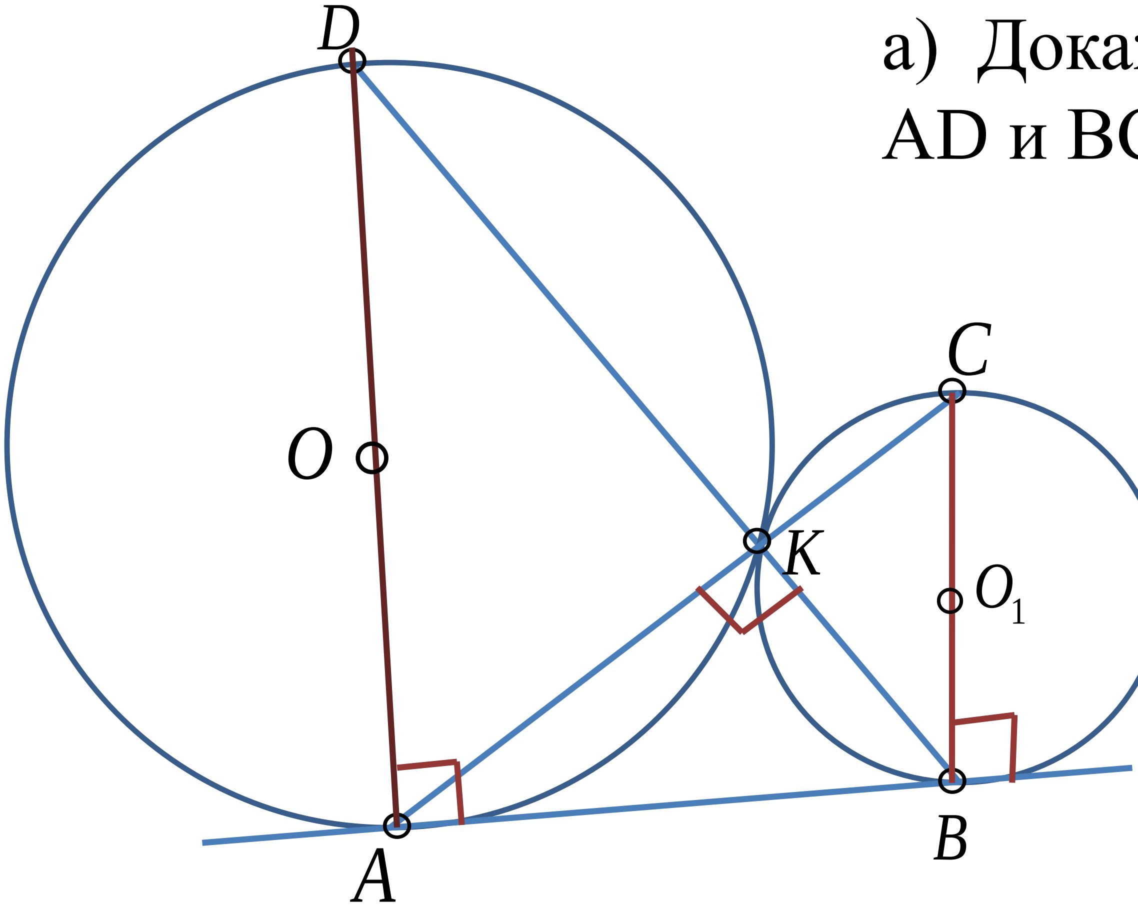


Задача 1.

Две окружности касаются внешним образом в точке K.Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй – в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1 а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

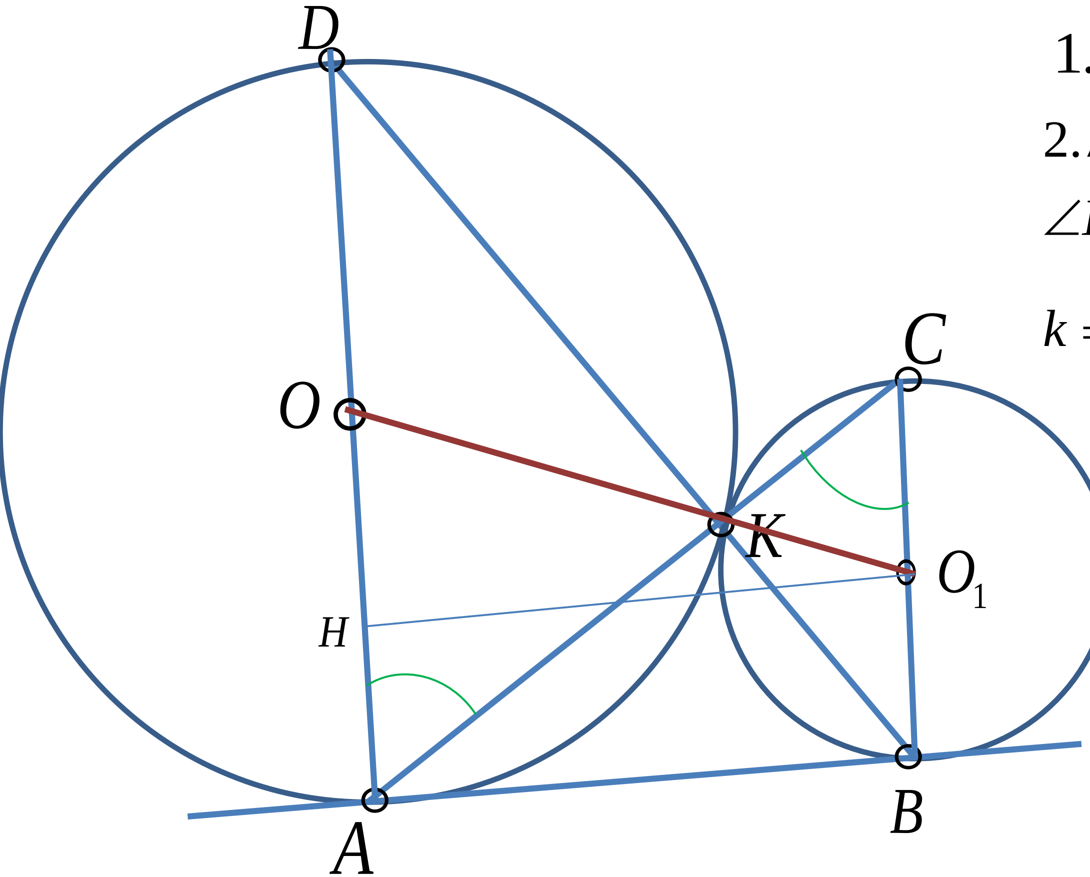


1. $\angle AKB = 90^0 \Rightarrow \angle AKD = 90^0 \Rightarrow \Delta AKD - прямоугольный \Rightarrow$
$AD - диаметр \Rightarrow \angle DAB = 90^0$

2. $\angle BKC = 90^0 \Rightarrow \angle BKC = 90^0 \Rightarrow \Delta BKC - прямоугольный \Rightarrow$
$BC - диаметр \Rightarrow \angle ABC = 90^0$

3. $AD \perp AB, BC \perp AB \Rightarrow AD \parallel BC$

б) Найдите площадь треугольника АКВ, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1



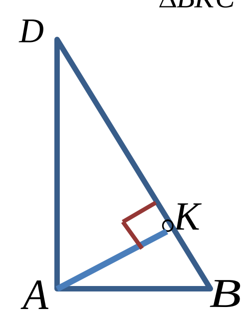
1. $AD \parallel BC \Rightarrow \angle DAC = \angle ACB$ (н / л)

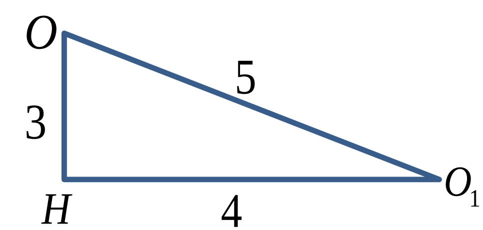
2. ΔAKD и ΔBKC – прямоугольные,

$\angle DAC = \angle ACB \Rightarrow \Delta AKD \infty \Delta BKC$,

$$k = \frac{AD}{BC} = \frac{DK}{BK} = \frac{AK}{CK} = \frac{4}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta AKD}}{S_{\Delta BKC}} = \frac{16}{1}$$

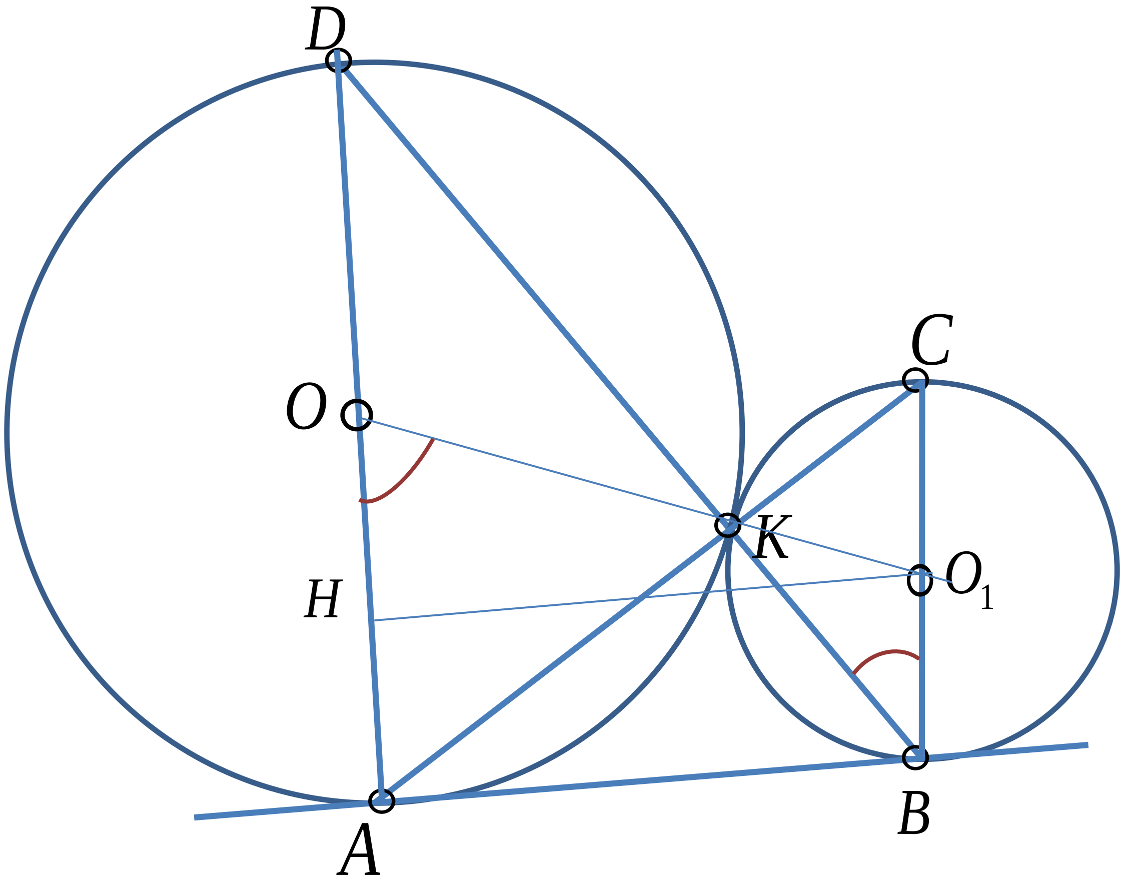




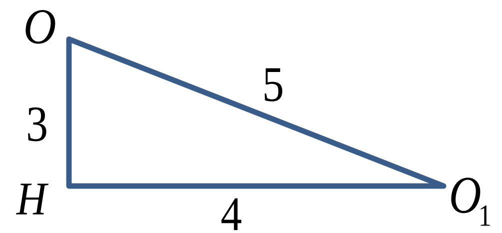
3. Т.к. ΔAKD и ΔAKB имеют общую высоту AK, то $\frac{S_{\Delta AKD}}{S_{\Delta AKB}} = \frac{DK}{BK} = \frac{4}{1}$

4. $S_{\Delta BKC} = S, S_{\Delta BO_1K} = \frac{S}{2}, S_{\Delta AKD} = 16S, S_{\Delta AOK} = 8S, S_{\Delta AKB} = 4S$

$$\Rightarrow S_{AOO_1B} = \frac{25S}{2} = \frac{AO + BO_1}{2} \cdot AB = 10 \Rightarrow S = \frac{20}{25} \Rightarrow S_{\Delta AKB} = 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$$



$$S_{\Delta AKB}=\frac{1}{2}AK\cdot KB$$



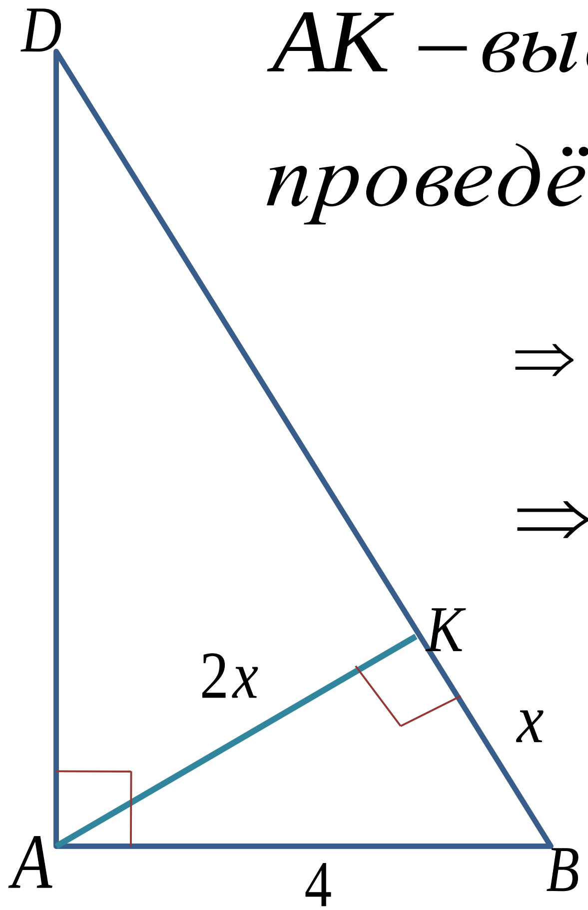
$$\cos\angle O_1OH=\frac{3}{5}$$

$$\cos\angle KO_1B=\cos(180^0-\angle O_1OH)=-\cos\angle O_1OH=-\frac{3}{5}$$

$$\Delta AOK: AK^2=AO^2+OK^2-2AO\cdot OK\cdot\cos\angle O_1OH=\frac{64}{5}$$

$$\Delta KO_1B: KB^2=KO_1^2+BO_1^2-2KO_1\cdot BO_1\cdot\cos\angle KO_1B=\frac{16}{5}$$

$$S_{\Delta AKB}=\frac{16}{5}$$



AK – *высота прямоугольного* ΔDAB,

проведённая из вершины прямого угла

$$\Rightarrow \Delta AKD \infty \Delta BKA \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AK}{KB} = \frac{DK}{BK} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1}$$

$$\Rightarrow AK = 2KB$$

$$4x^2 + x^2 = 16 \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

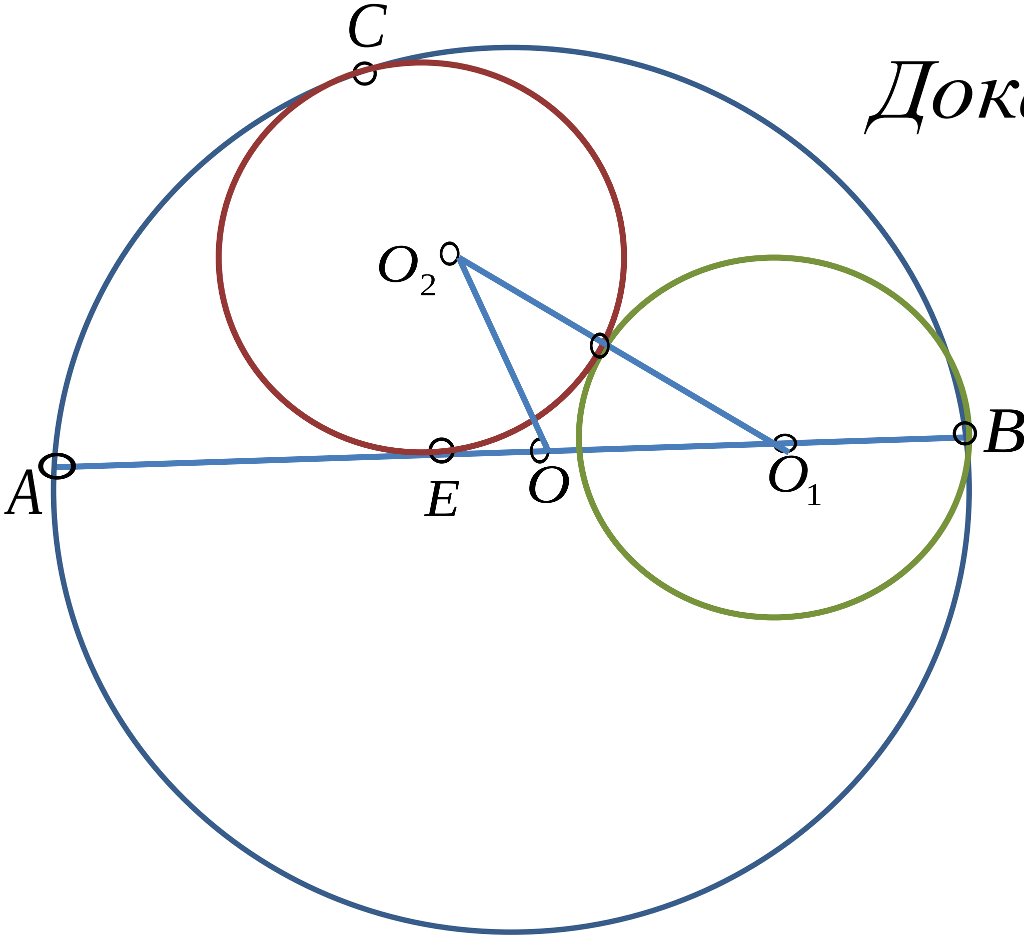
$$KB = \frac{4}{\sqrt{5}};\ AK = \frac{8}{\sqrt{5}} \Rightarrow S_{\Delta AKB} = \frac{16}{5}$$

Задача 2

Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трех окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 4 и 1



$$\text{Доказать, что } P_{\Delta OO_1O_2} = 2R$$

Если две окружности касаются, то точка касания лежит на **прямой, соединяющей центры**.

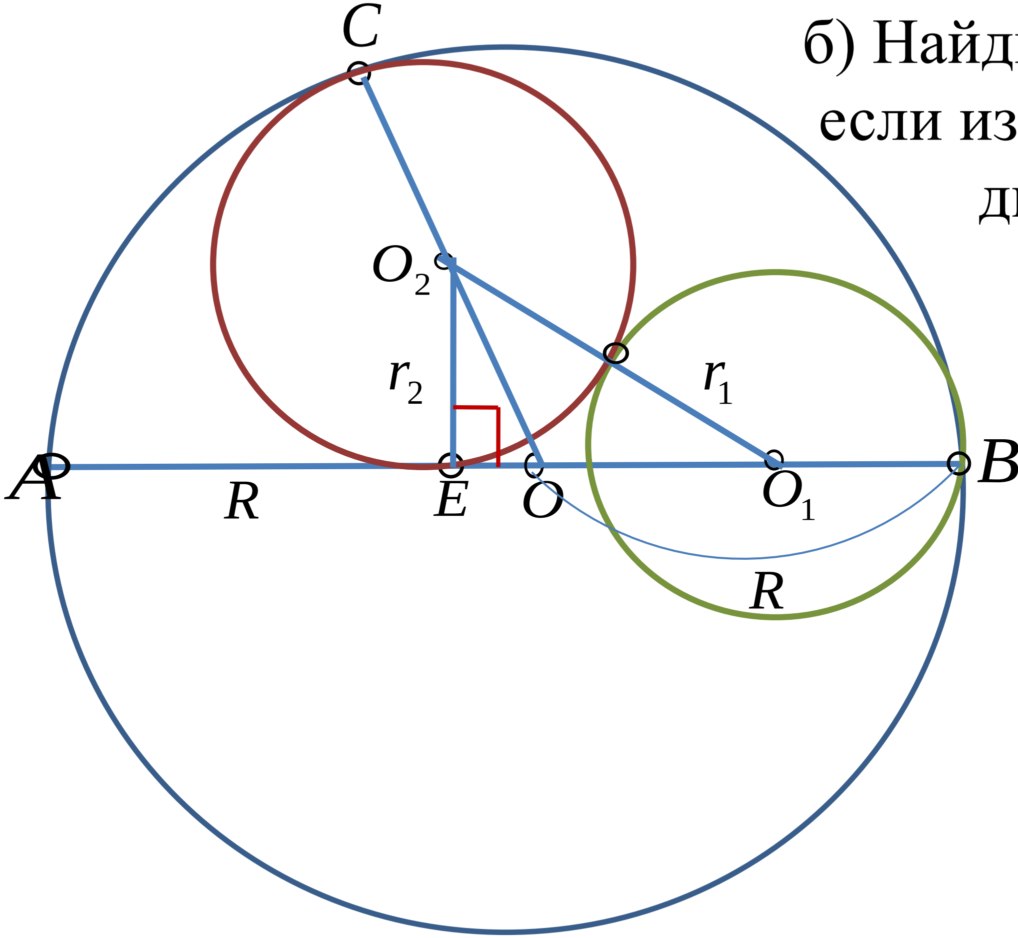
$AO = OB = R; O_1B = r_1; O_2C = r_2$

1. $OO_1 = R - r_1$

2. $OO_2 = R - r_2$

3. $O_1O_2 = r_1 + r_2$

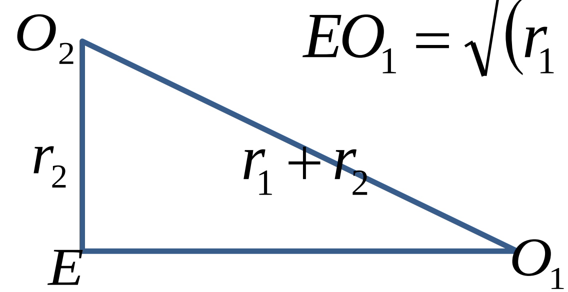
$$P_{\Delta OO_1O_2} = OO_1 + OO_2 + O_1O_2 = R - r_1 + R - r_2 + r_1 + r_2 = 2R$$



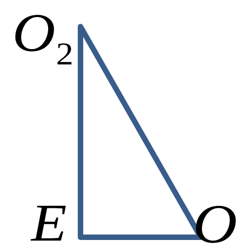
б) Найдите радиус третей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 4 и 1

$$AO=OB=R=4;\ O_1B=r_1=1;$$

$$O_2C=r_2=?$$



$$EO_1=\sqrt{(r_1+r_2)^2-r_2^2}$$



$$EO=\sqrt{(R-r_2)^2-r_2^2}$$

$$EO=EO_1-OO_1=\sqrt{(r_1+r_2)^2-r_2^2}-(R-r_1)$$

$$\sqrt{(R-r_2)^2-r_2^2}=\sqrt{(r_1+r_2)^2-r_2^2}-(R-r_1)$$

$$\sqrt{(4-r_2)^2-r_2^2}=\sqrt{(1+r_2)^2-r_2^2}-3$$

$$\sqrt{16-8r_2}=\sqrt{1+2r_2}-3$$

$$16-8r_2=1+2r_2+9-6\sqrt{1+2r_2}$$

$$6\sqrt{1+2r_2}=10r_2-6$$

$$3\sqrt{1+2r_2}=5r_2-3$$

$$9+18r_2=25r_2^2-30r_2+9$$

$$25r_2^2-48r_2=0$$

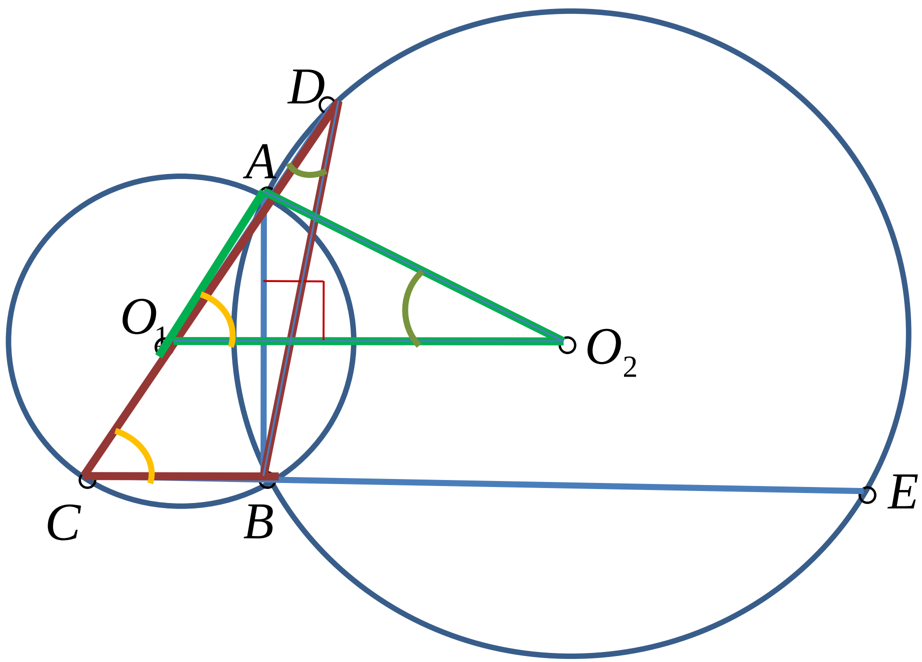
$$r_2=\frac{48}{25}$$

Задача 3

Две окружности с центрами O_1 *и* O_2 *пересекаются в точках* A *и* B, *причем точки* O_1 *и* O_2 *лежат по разные стороны от прямой* AB. *Продолжение диаметра* AC *первой окружности и хорды* CB *этой окружности пересекают вторую окружность в точках* D *и* E *соответственно.*

а) Докажите, что треугольники CBD *и* O_1AO_2 *подобны.*

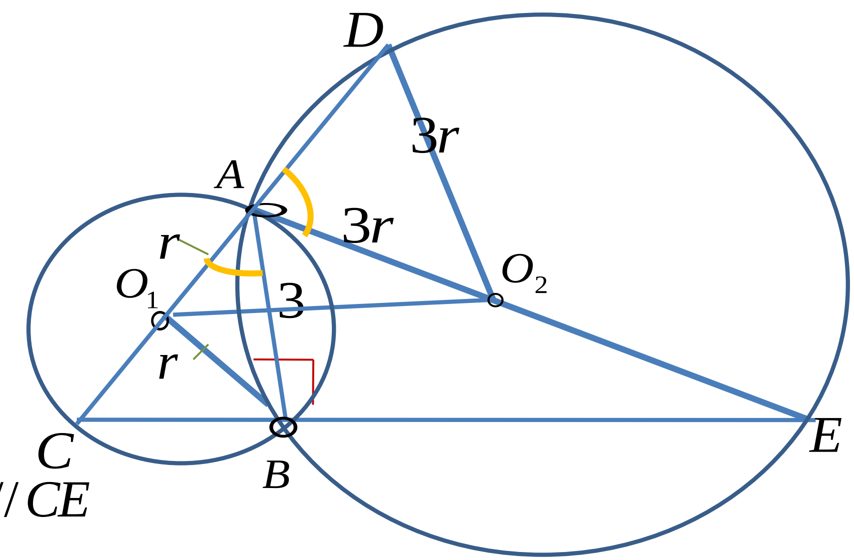
б) Найдите AD, *если* $\angle DAE = \angle BAC$, *радиус второй окружности втрое больше радиуса первой и* $AB = 3$



$$AB \perp O_1O_2 \Rightarrow \angle AO_1O_2 = \frac{1}{2}\angle AO_1B = \angle ACB$$

$$\Rightarrow \angle AO_2O_1 = \frac{1}{2}\angle AO_2B = \angle ADB$$

а) Докажите, что $\Delta CBD \infty \Delta O_1AO_2$.



$\angle AO_1O_2 = \angle ACB$ (*соответственные*) $\Rightarrow O_1O_2 \,//\, CE$

Т.к. $O_1O_2 \perp AB \Rightarrow CE \perp AB \Rightarrow \angle ABE = 90^0 \Rightarrow AE -$ *диаметр первой окружности*

б) Найдите AD, *если* $\angle DAE = \angle BAC$, $O_2A = 3O_1A$ *и* $AB = 3$

$$\left.\begin{array}{l} AO_1 = BO_1 = r \Rightarrow \Delta AO_1B - \textit{равнобедренный} \Rightarrow O_1AB = \angle O_1BA \\ AO_2 = DO_2 = 3r \Rightarrow \Delta AO_2D - \textit{равнобедренный} \Rightarrow O_2AD = \angle O_2DA \\ \angle DAE = \angle BAC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AO_1B \infty \Delta AO_2D$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DO_2}{BO_1} = \frac{AO_2}{AO_1} \Rightarrow \frac{AD}{3} = \frac{3r}{r} \Rightarrow AD = 9$$