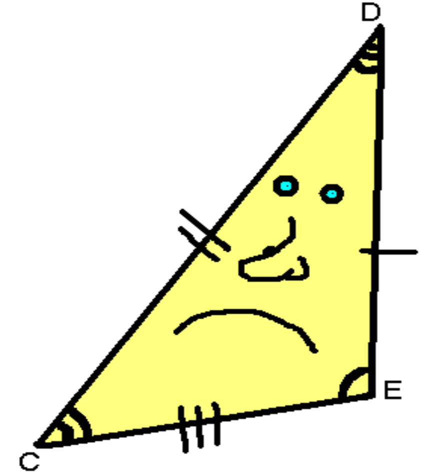
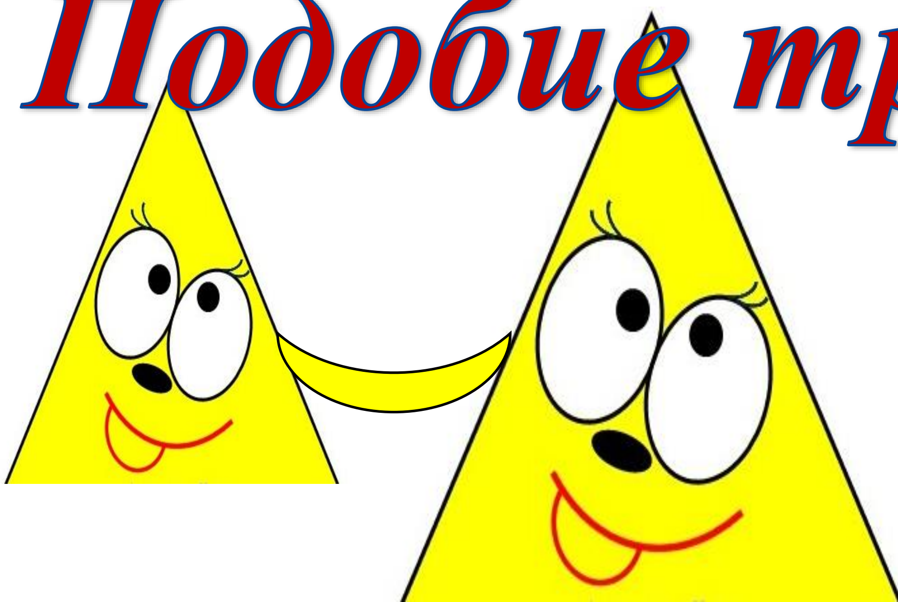
МАОУ Вторая гимназия

Предметно-методическая мастерская
«Решение задач по планиметрии в курсе ЕГЭ»

- Попова О.В., учитель математики высшей квалификационной категории
- Макарова С.А., учитель математики высшей квалификационной категории



Занятие № 3
Подобие треугольников

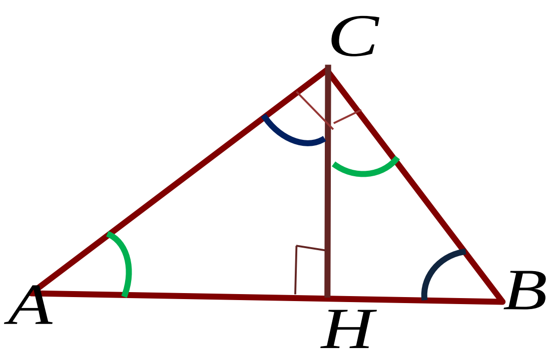


Определение

Треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.

Коэффициентом подобия называют число, равное отношению сходственных сторон

- Сходственные стороны- это стороны, лежащие напротив равных углов



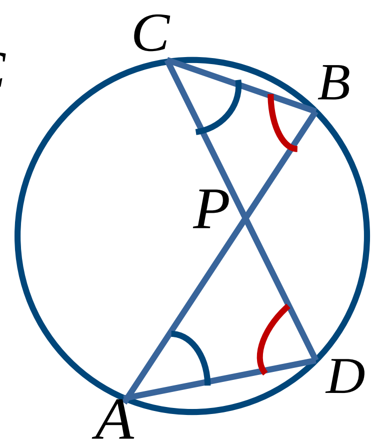
$1.\Delta ACB \infty \Delta BHC$

$AB = 10$

$BC = 5$

$k = ?$

$BH = ?$



$1.\Delta CBP \infty \Delta ADP$

$AD = 10$

$CB = 8$

$PD = 5$

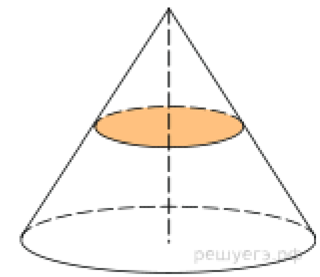
$k = ?$

$BP = ?$

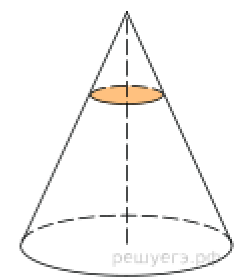
Свойства подобных треугольников

- Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия

Задачи



1. Площадь полной поверхности конуса равна 12. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту в отношении 1:1, считая от вершины конуса. Найдите площадь полной поверхности отсечённого конуса.



2. Площадь основания конуса равна 18. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 3 и 6, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.

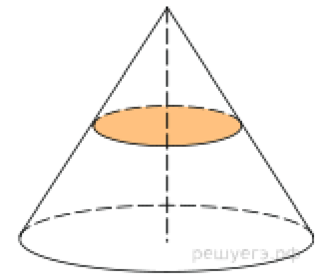
3. В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 1. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.

4. Во сколько раз увеличится площадь поверхности пирамиды, если все ее ребра увеличить в 2 раза?

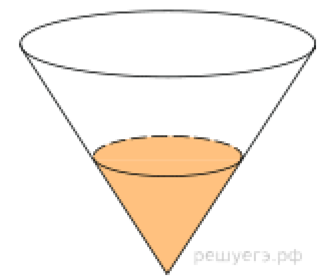
• Отношение объёма подобных стереометрических фигур равно кубу коэффициента подобия

Задачи

1. Объем конуса равен 16. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.



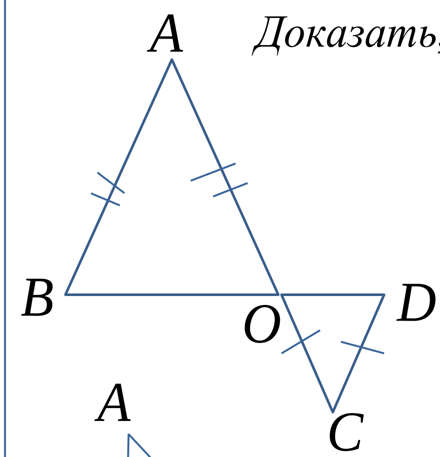
2. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает 1/2 высоты. Объём жидкости равен 70 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



3. Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?

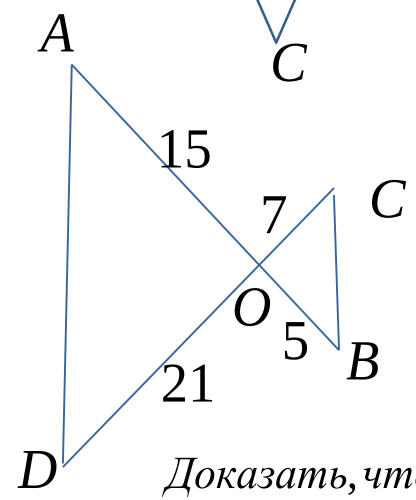
Признаки подобия треугольников

• Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.



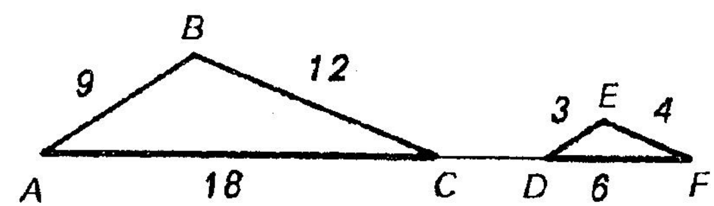
Доказать, что $\Delta ABO \infty \Delta CDO$

• Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.



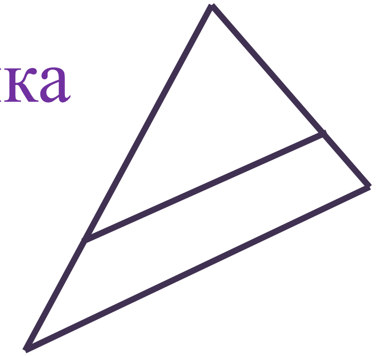
Доказать, что $\Delta AOD \infty \Delta COB$

• Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.



Основные ситуации, связанные с подобием

Прямая, параллельная стороне треугольника



Задачи ЕГЭ(1 часть)

№1 Площадь треугольника ABC равна 4, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь треугольника CDE.

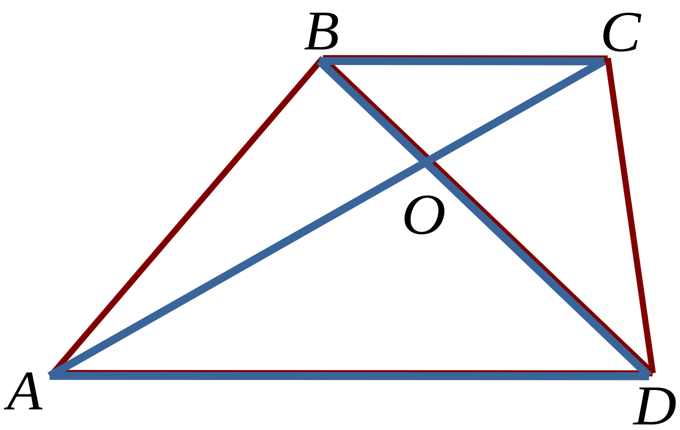
№2 В треугольнике ABC отрезок DE — средняя линия. Площадь треугольника CDE равна 38. Найдите площадь треугольника ABC.

№3 Площадь треугольника ABC равна 10, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.

№4 Детская горка укреплена вертикальным столбом, расположенным посередине спуска. Найдите высоту l этого столба, если высота h горки равна 3 метрам. Ответ дайте в метрах.

№5 Электрику ростом 1,8 метра нужно поменять лампочку, закреплённую на стене дома на высоте 4,2 м. Для этого у него есть лестница длиной 3 метра. На каком наибольшем расстоянии от стены должен быть установлен нижний конец лестницы, чтобы с последней ступеньки электрик дотянулся до лампочки? Ответ запишите в метрах.

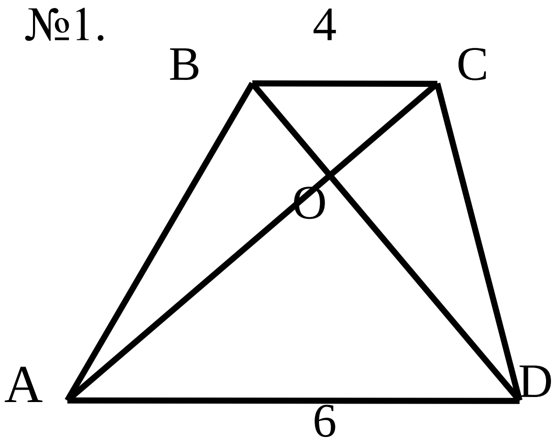
Диагонали трапеции



$$\Delta AOD \infty \Delta BOC$$

$$Доказать, что\ S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}$$

№1.

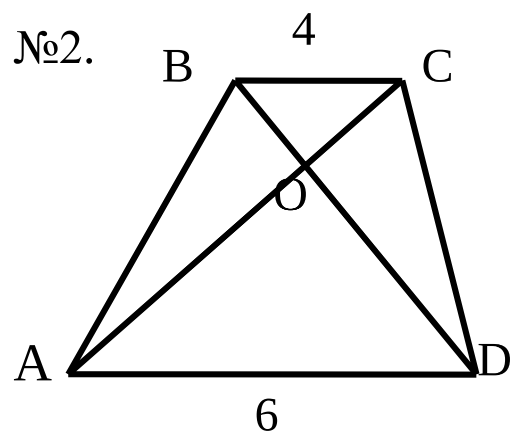


AC=8

Найти AO, OC

BO, OD

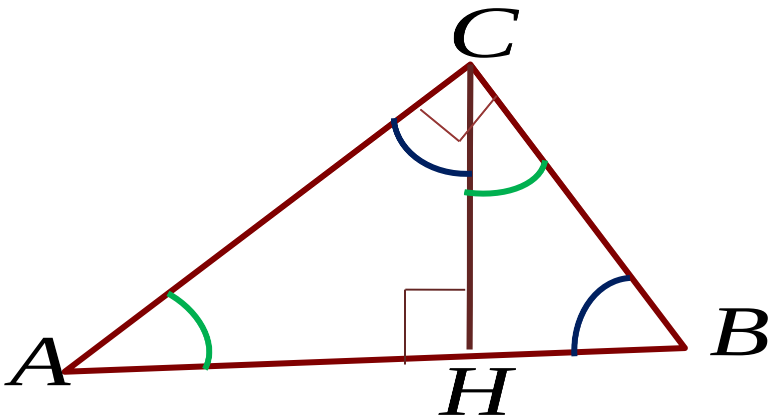
№2.



$$S_{AOB} = 12$$

Найти S_{ABCD}

Высота прямоугольного треугольника



$$\Delta AHC \infty \Delta ACB$$

$$\Delta CHB \infty \Delta ACB$$

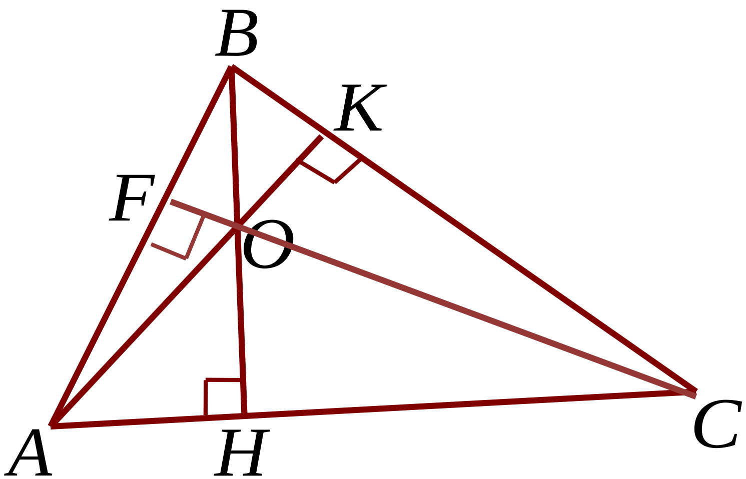
$$\Delta AHC \infty \Delta BHC$$

№1 В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, *CH* — высота, *BC* = 8, *BH* = 4. Найдите $\sin A$

№2 В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, *CH* — высота, *BC* = 25, *BH* = 20. Найдите $\cos A$

№3 В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, высота *CH* равна 4, $BC = \sqrt{17}$ Найдите tgA

Высоты треугольника



Выписать все парыподобныхтреугольников

$\Delta ABK \infty \Delta CBF$

$\Delta AHO \infty \Delta BKO$

$\Delta AFO \infty \Delta CKO$

$\Delta AHO \infty \Delta AKC$

$\Delta AFO \infty \Delta CFA$

$\Delta AHO \infty \Delta BHC$

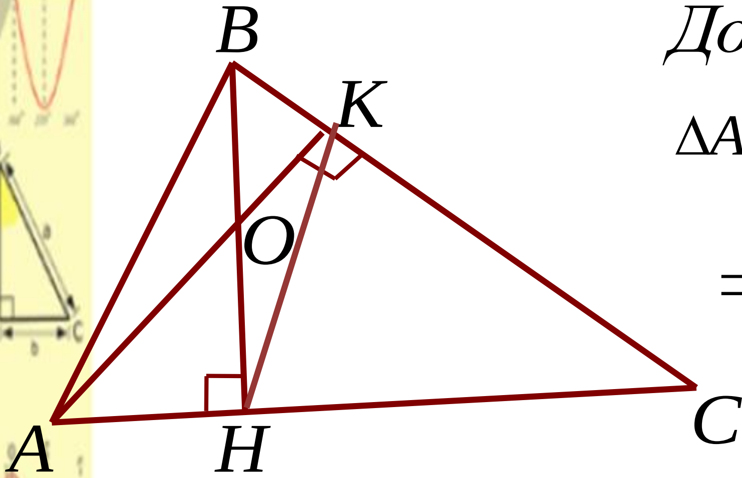
$\Delta AFO \infty \Delta AKB$

$\Delta HAB \infty \Delta FAC$

$\Delta ACK \infty \Delta BCH$

$\Delta BFO \infty \Delta CHO$

Отрезок, соединяющий основания высот



Доказать, что $\Delta ABC \backsim \Delta KHC$

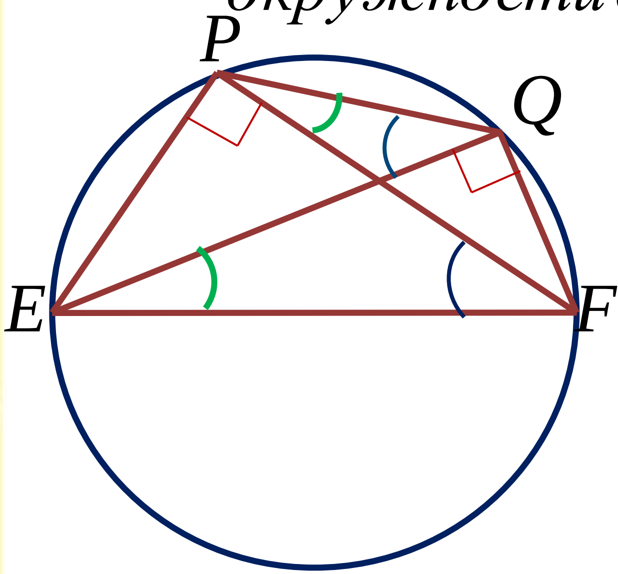
$\Delta AKC : \dfrac{KC}{AC} = \cos C \qquad \Delta BHC : \dfrac{HC}{BC} = \cos C$

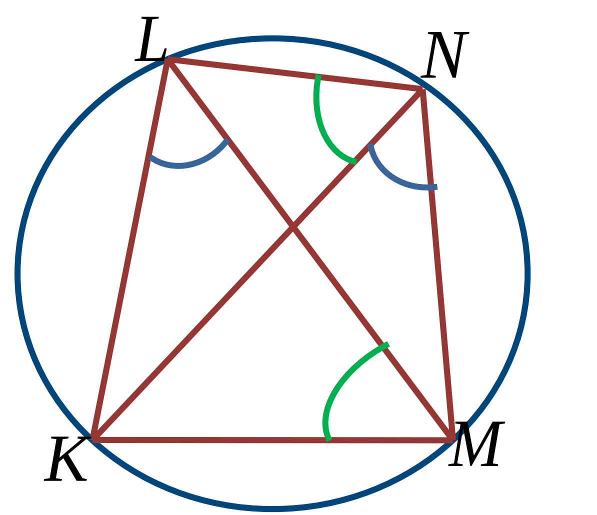
$\Rightarrow \dfrac{HC}{BC} = \dfrac{KC}{AC} = \cos C = k \quad , \angle C - \text{общий}$

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta KHC$

<u>Важно</u> E, P, Q, F *– лежат на окружности с диаметром* EF

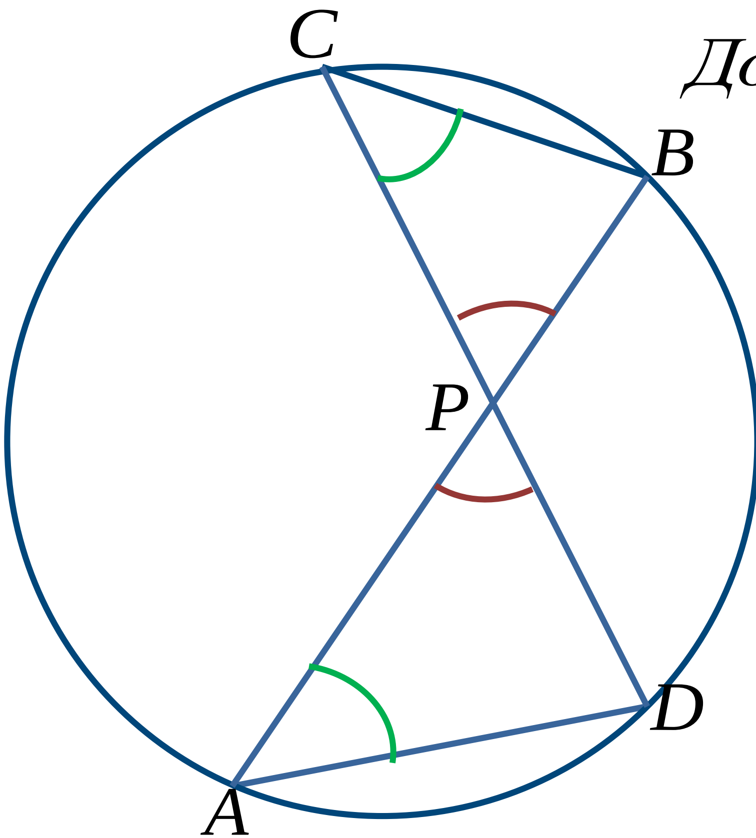
K, L, N, M *– лежат на одной окружности*





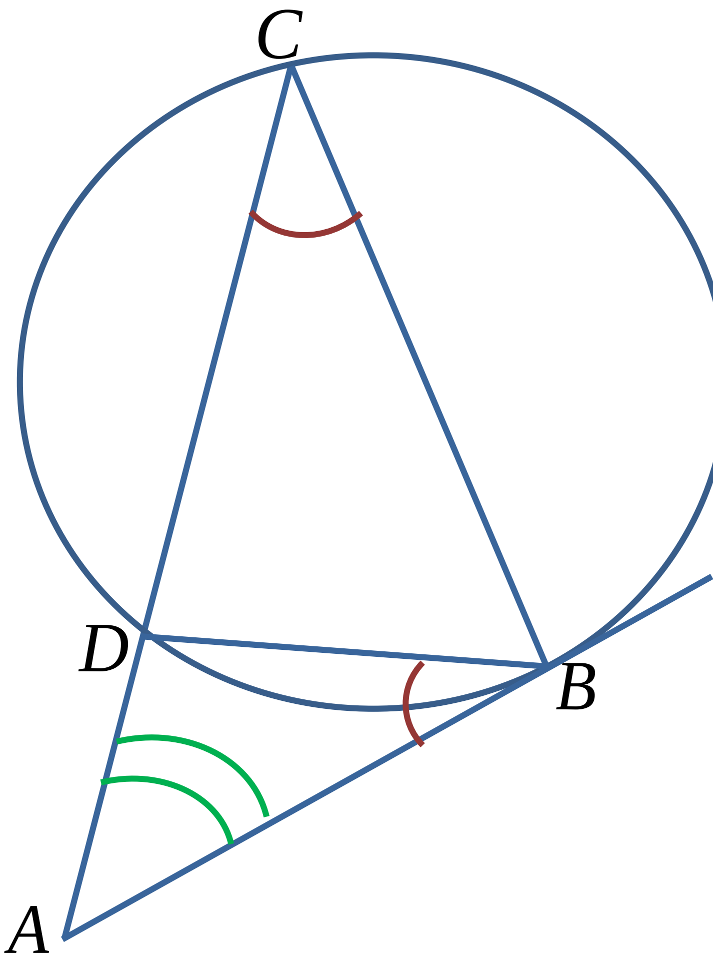
Пересечение хорд

$$\text{Доказать, что } CP \cdot PD = AP \cdot PB$$



Касательная и секущая

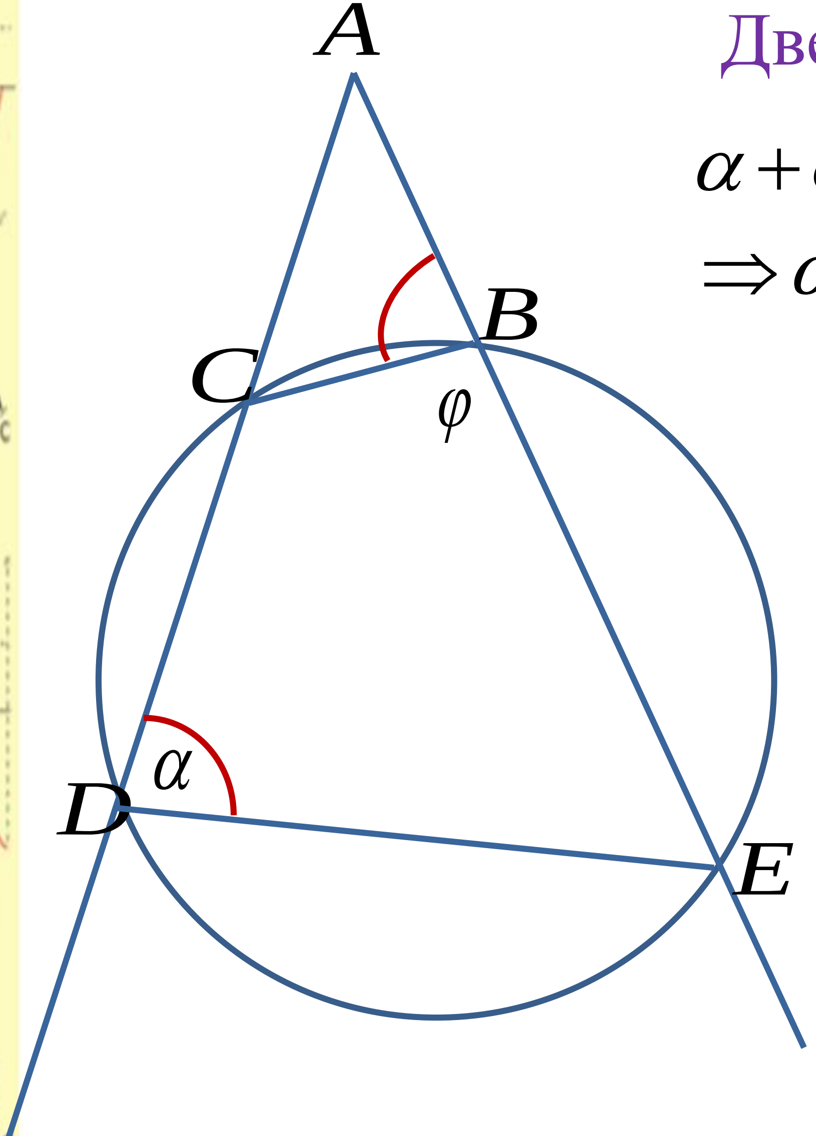
$$Th : \angle DBA = \frac{1}{2} \cup BD$$



$$\Delta DAB \infty \Delta CAB$$

Доказать, что $AB^2 = AC \cdot AD$

Две секущие



$$\alpha+\varphi=180^0 \quad \angle ABC+\varphi=180^0$$

$$\Rightarrow \alpha=\angle ABC \quad , \angle DAE - \textit{общий}$$

$$\Rightarrow \Delta ACB \infty \Delta DAE$$

$$\boxed{\textit{Свойство секущих}}$$

Доказать, что $AE \cdot AB = AC \cdot AD$

Задачи ЕГЭ

В остроугольном треугольнике *ABC* провели высоту *BH*, из точки *H* на стороны *AB* и *BC* опустили перпендикуляры *HK* и *HM* соответственно.
а) Докажите, что треугольник *MBK* подобен треугольнику *ABC*.
б) Найдите отношение площади треугольника *MBK* к площади четырёхугольника *AKMC*, если *BH* = 2, а радиус окружности, описанной около треугольника *ABC* равен 4

$\Delta AHB - прямоугольный \Rightarrow$

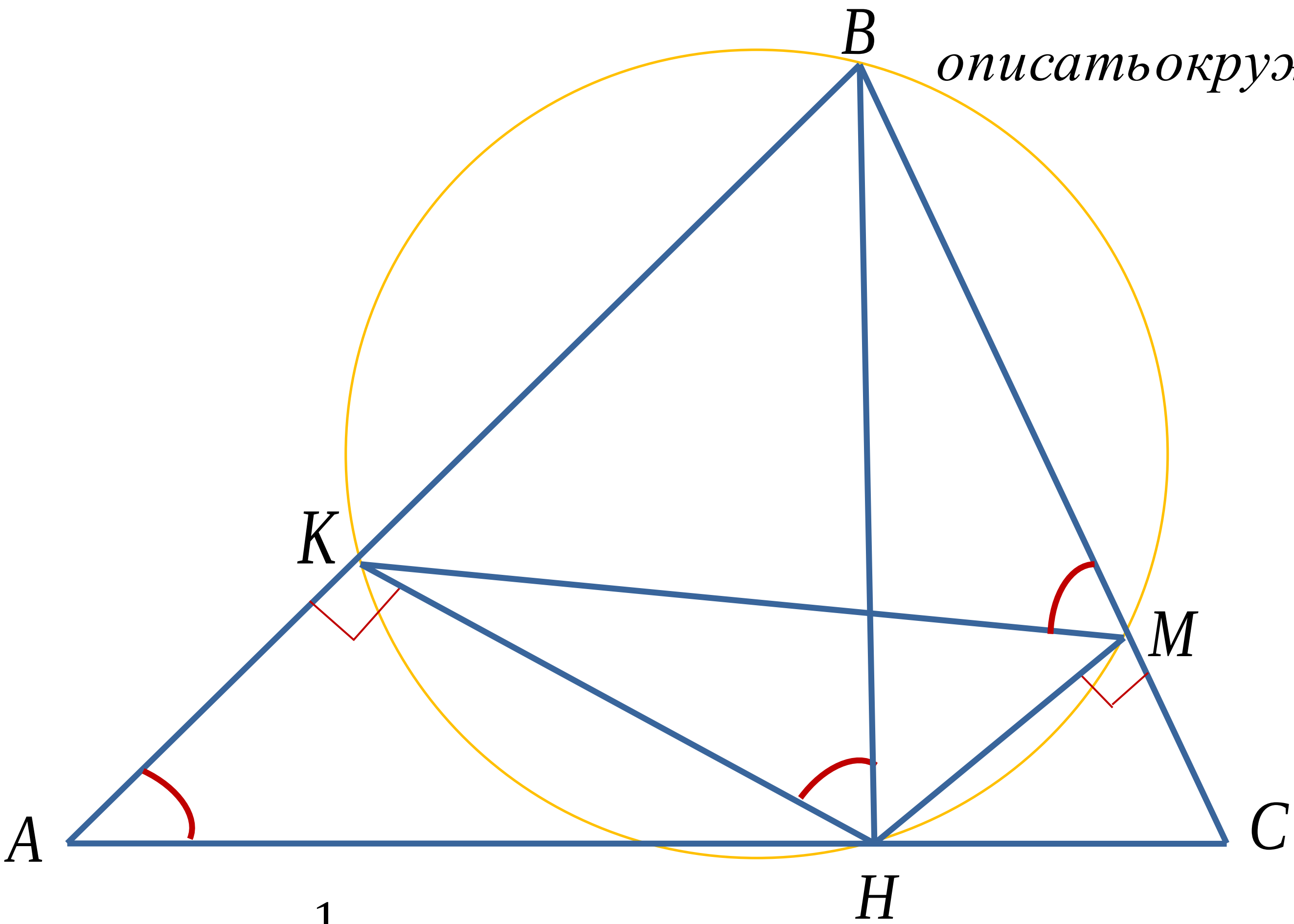
$\Delta AKH \sim \Delta BKH \Rightarrow \angle BAH = \angle BHK$

$BKHM - выпуклый,$

$где\, \angle BKH + \angle BMH = 180^0 \Rightarrow$

$около\, BKHM\, можно$

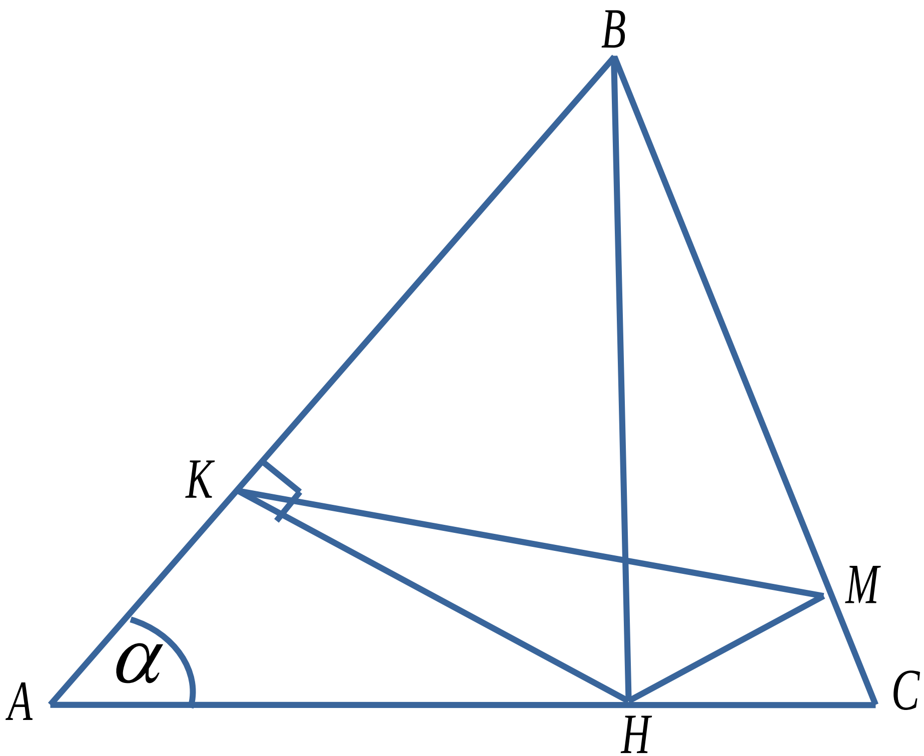
$описать\, окружность$



$\angle BHK = \angle KMB = \frac{1}{2} \cup KB$

$\angle B - общий, \angle BMK = \angle BAC \Rightarrow \Delta BMK \sim \Delta ABC$

Найдите отношение площади треугольника *MBK* к площади четырёхугольника *AKMC*, если *BH* = 2, а радиус окружности, описанной около треугольника *ABC* равен 4



$$\Delta ABC : \frac{BC}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow \sin\alpha = \frac{BC}{2R}$$

$$\Delta BKH : \frac{BK}{BH} = \sin\alpha$$

$$\frac{BK}{BH} = \frac{BC}{2R} \Rightarrow \frac{BC}{BK} = \frac{2R}{BH} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\Delta BMK \infty \Delta ABC \Rightarrow \frac{BC}{BK} = k = 4$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BMK}} = k^2 = \frac{1}{16}$$

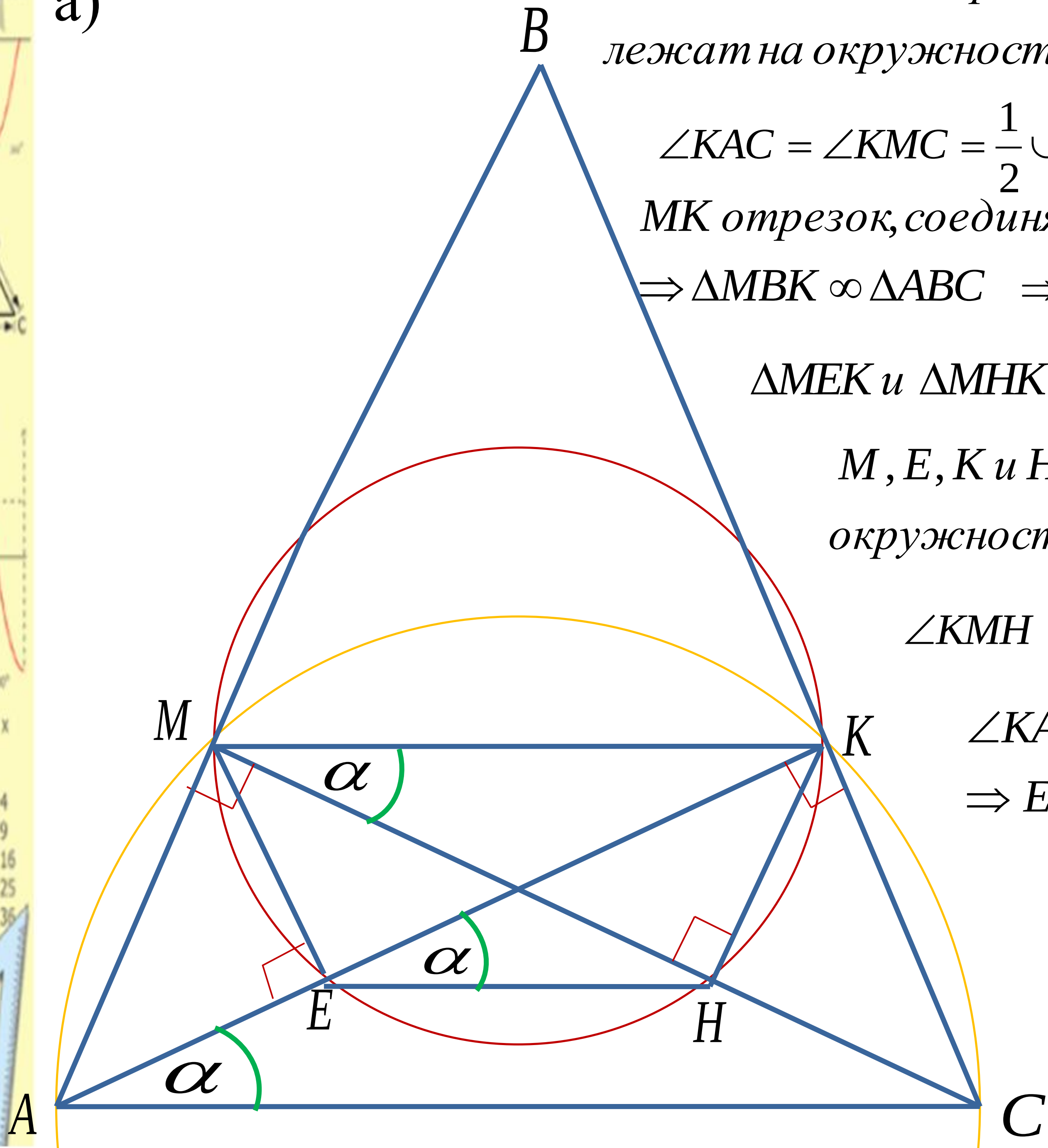
$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta BMK}}{S_{AKMC}} = \frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{1}{15}$$

В треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно

а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны;

б) Найдите отношение $EH : AC$, если угол ABC равен $30°$.

а)



ΔAMC *и* ΔAKC *− прямоугольные* $\Rightarrow A, M, K, C$ *лежат на окружности с диаметром* AC

$$\angle KAC = \angle KMC = \frac{1}{2} \cup KC$$

MK *отрезок, соединяющий основания высот*

$$\Rightarrow \Delta MBK \infty \Delta ABC \quad \Rightarrow \frac{MK}{AC} = \frac{BK}{AB} = \frac{BM}{AC} = \cos\angle B$$

ΔMEK *и* ΔMHK *− прямоугольные* $\Rightarrow$

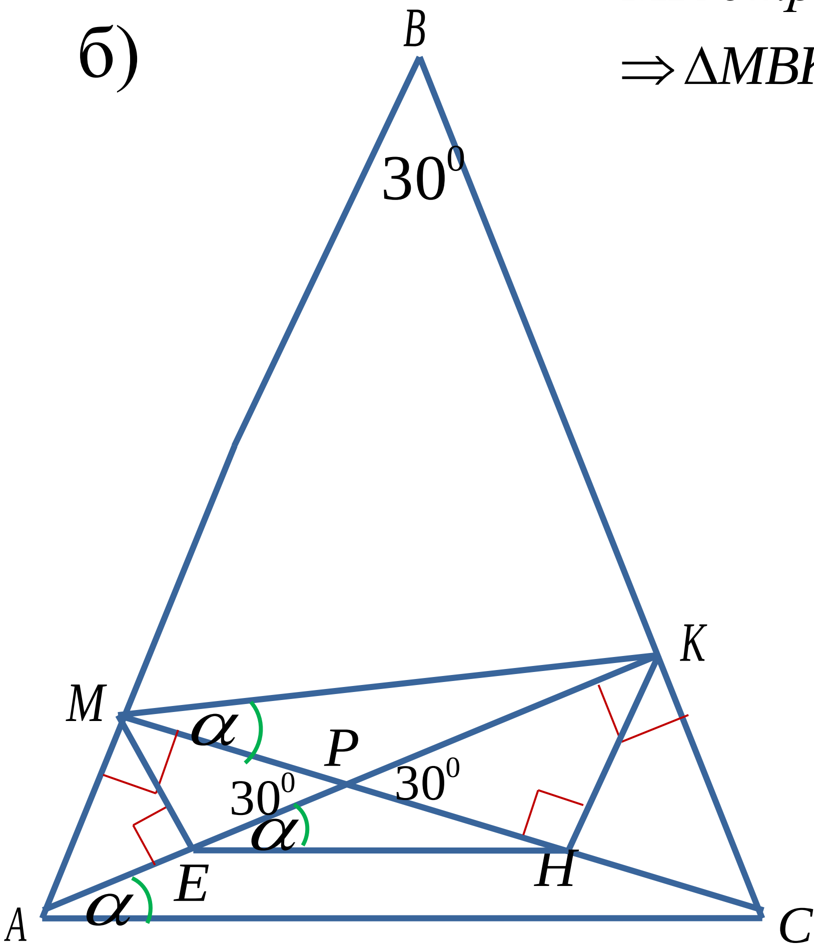
M, E, K *и* H *− лежат на окружности с диаметром* MK

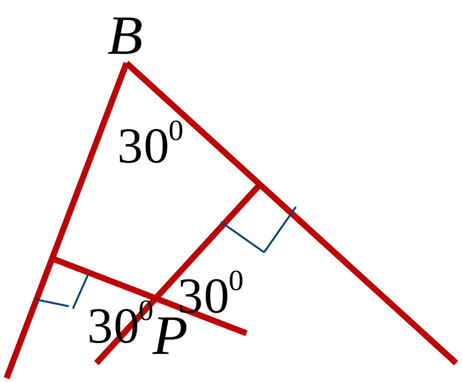
$$\angle KMH = \angle KEH = \frac{1}{2} \cup KH$$

$\angle KAC = \angle KEH$ *− соотв.*

$\Rightarrow EH \parallel AC$

б)





MK отрезок, соединяющий основания высот

$$\Rightarrow \Delta MBK \sim \Delta ABC \quad \Rightarrow \frac{MK}{AC} = \frac{BK}{AB} = \frac{BM}{AC} = \cos\angle B$$

$$\Rightarrow \frac{MK}{AC} = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta MPK \sim \Delta HPE \Rightarrow \frac{EH}{MK} = \frac{PH}{PK} = \frac{EP}{MP}$$

ΔMEP – *прямоугольный*

$$\frac{EP}{MP} = \cos\angle MPE = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{EP}{MP} = \frac{EH}{MK} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MK = \frac{2EH}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\frac{2EH}{\sqrt{3}}}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2EH}{\sqrt{3}AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 4EH = 3AC \Rightarrow \frac{EH}{AC} = \frac{3}{4}$$