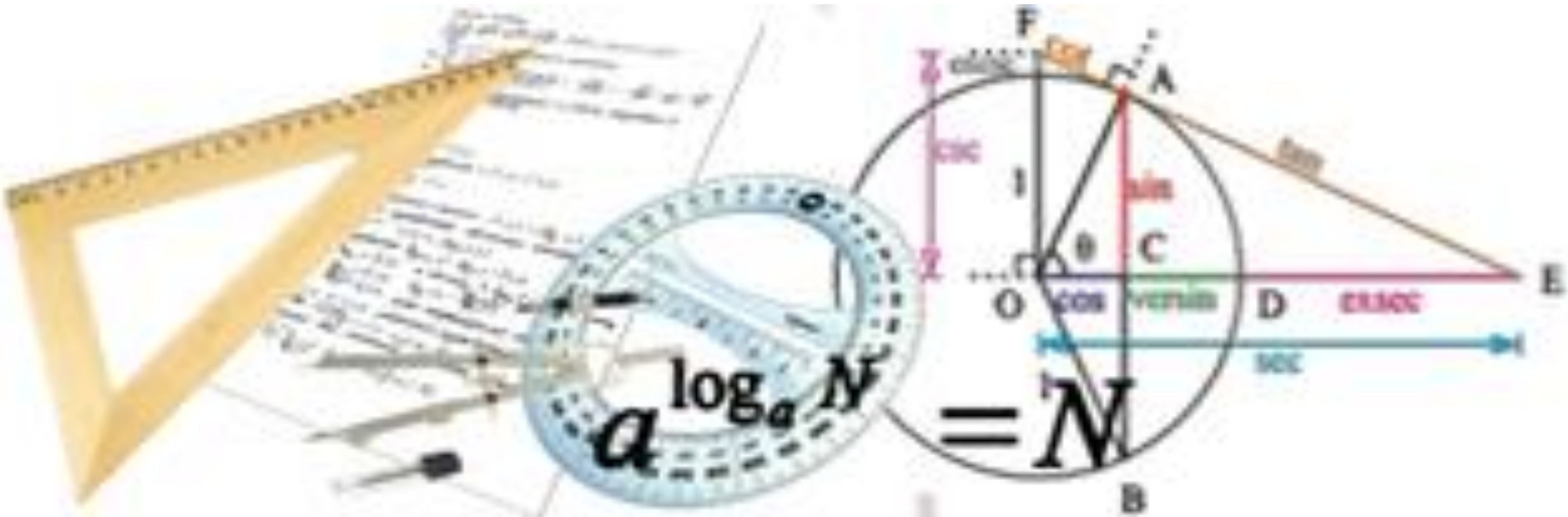
# МАОУ Вторая гимназия

Предметно–методическая мастерская
«Решение задач по планиметрии в курсе ЕГЭ»

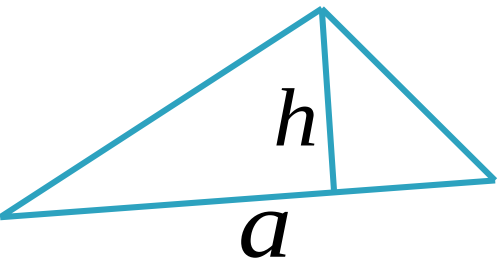

- Попова О.В., учитель математики высшей квалификационной категории
- Макарова С.А., учитель математики высшей квалификационной категории

# Занятие № 2
# Задачи на площадь

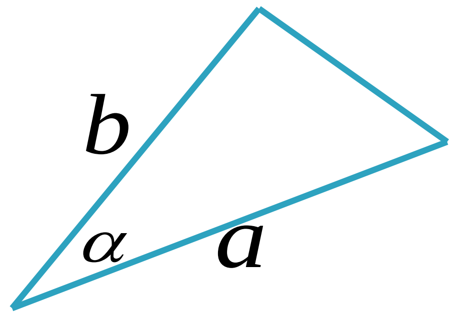


# Теория

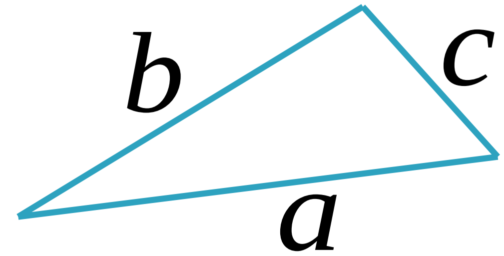
## Треугольник




$$S = \frac{1}{2} a h$$

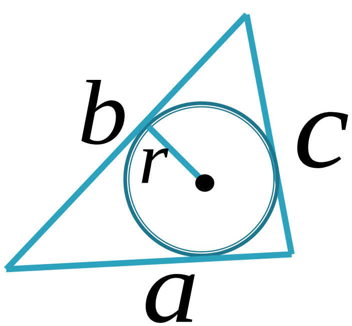



$$S = \frac{1}{2} a b \sin\alpha$$

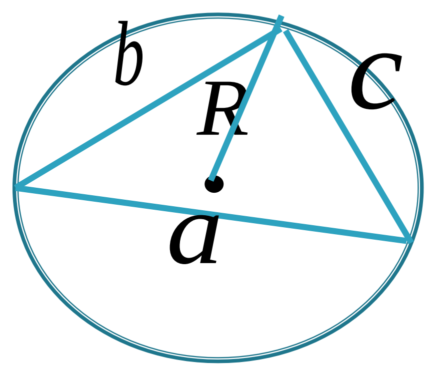



$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$




$$S = \frac{1}{2} \mathrm{Pr}$$




$$S = \frac{abc}{4R}$$

**Четырехугольники**

*выпуклые*

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$$

*невыпуклые*

*параллелограмм*

$$S = ah$$

$$S = ab\sin\alpha$$

*трапеция*

$$S = \frac{a+b}{2} h$$

*прямоугольник*

$$S = ab$$

*ромб*

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

*квадрат*

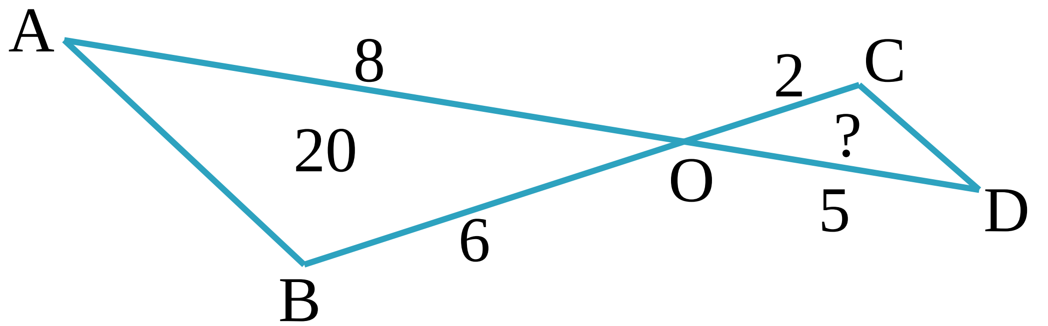
$$S = a^2$$

## Важная теорема 1

- Площади треугольников, имеющих равный угол, относятся как произведения сторон, содержащих этот угол

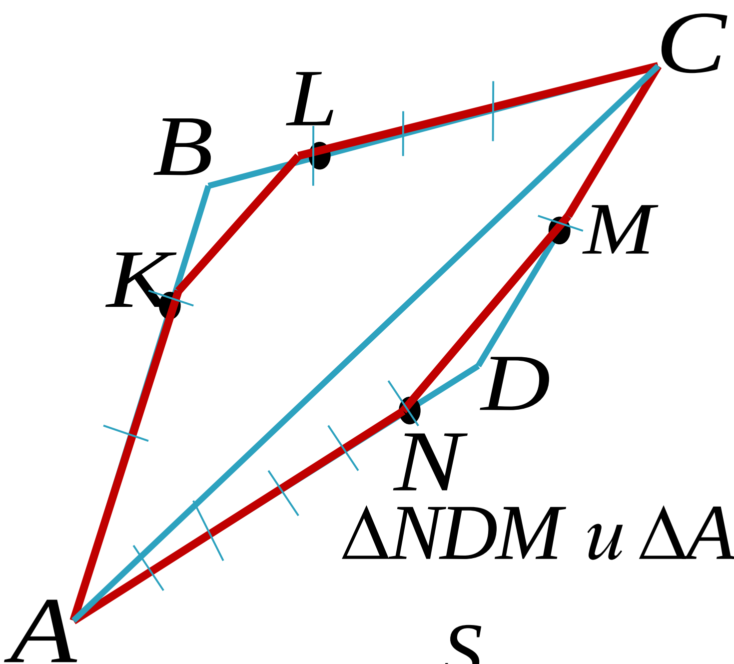
### Задачи для устной работы

Задача 1.




Задача 2. M – середина AB. MB = 4 см, AK = 4 см, AC = 12 см. Найти $S_{BCKM}$, если $S_{AMK} = 16$ см$^2$.

Задача. Площадь выпуклого четырехугольника равна единице. На сторонах взяты точки: K на AB, L на BC, M на CD, N на DA. При этом AK/KB=2, BL/LC=1/3, CM/MD=1, DN/NA=1/5. Найдите площадь шестиугольника AKLCMN.




$$\Delta BKL \text{ и } \Delta ABC \text{ имеют общий } \angle B$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta BKL}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{BK \cdot BL}{AB \cdot AD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$S_{\Delta BKL} = \frac{1}{12} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{12}$$

$$\Delta NDM \text{ и } \Delta ADC \text{ имеют общий } \angle D$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta NDM}}{S_{\Delta ADC}} = \frac{DN \cdot DM}{AD \cdot DC} \Rightarrow S_{\Delta NDM} = \frac{1}{12} S_{\Delta ADC} = \frac{1}{12}$$

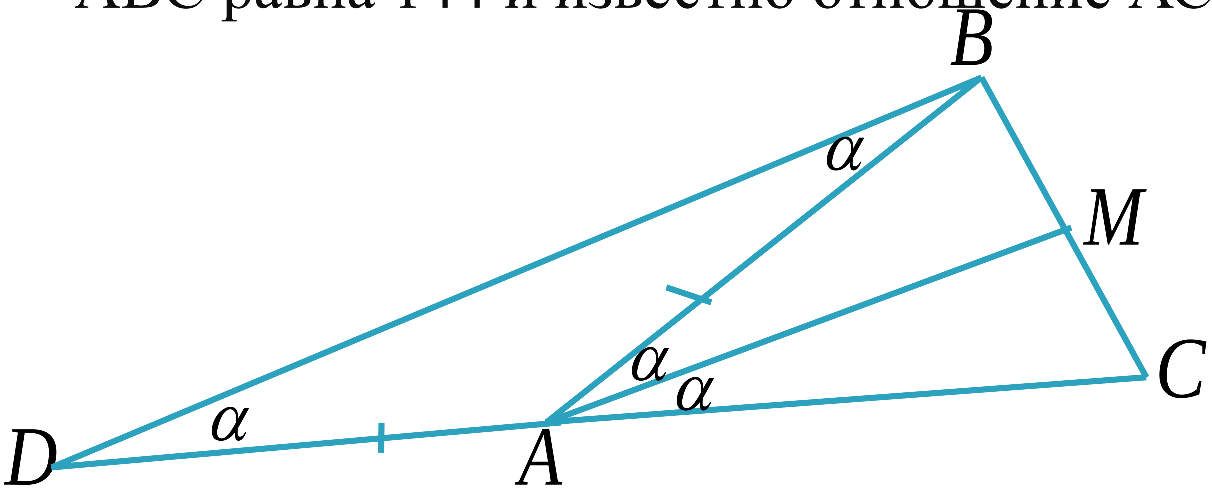
$$S_{AKLCMN} = S_{ABCD} - S_{\Delta BKL} - S_{\Delta NDM} = \frac{5}{6}$$

# Задача 1( ЕГЭ)

На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M.

а) Докажите, что AM- биссектриса угла BAC.

б) Найдите площадь трапеции AMBD, если площадь треугольника ABC равна 144 и известно отношение AC:AB =3:1

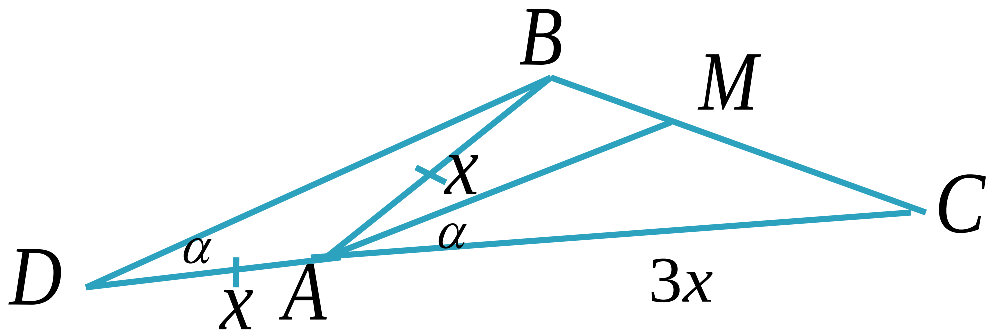



$$а)\ \Delta DAB\ равнобедренный \Rightarrow \angle BDA = \angle ABD = \alpha$$

$$\angle BAC - внешний\ к\ \Delta DAB \Rightarrow \angle BAC = 2\alpha$$

$$MA // BD \Rightarrow \angle BDA = \angle MAC = \alpha\ (соответственные)$$

$$\Rightarrow \angle BAM = \angle MAC = \alpha \Rightarrow AM - биссектриса$$




$$б)\ \frac{AC}{AB}=\frac{3}{1}.\ Пусть\ AB=AD=x,\ тогда\ AC=3x$$

$$Т.к.\ \angle BAM=\angle CAM \Rightarrow \frac{S_{\Delta BAM}}{S_{\Delta CAM}}=\frac{AB\cdot AM}{AC\cdot AM}=\frac{1}{3}$$

$$S_{\Delta ABC}=144 \Rightarrow S_{\Delta CAM}=\frac{3}{4}\cdot 144=108$$

$$\Delta AMC \infty \Delta DBC\ (по\ двум\ углам),\ k=\frac{3}{4}\Rightarrow \frac{S_{\Delta AMC}}{S_{\Delta DBC}}=\frac{9}{16}\Rightarrow S_{\Delta DBC}=192$$

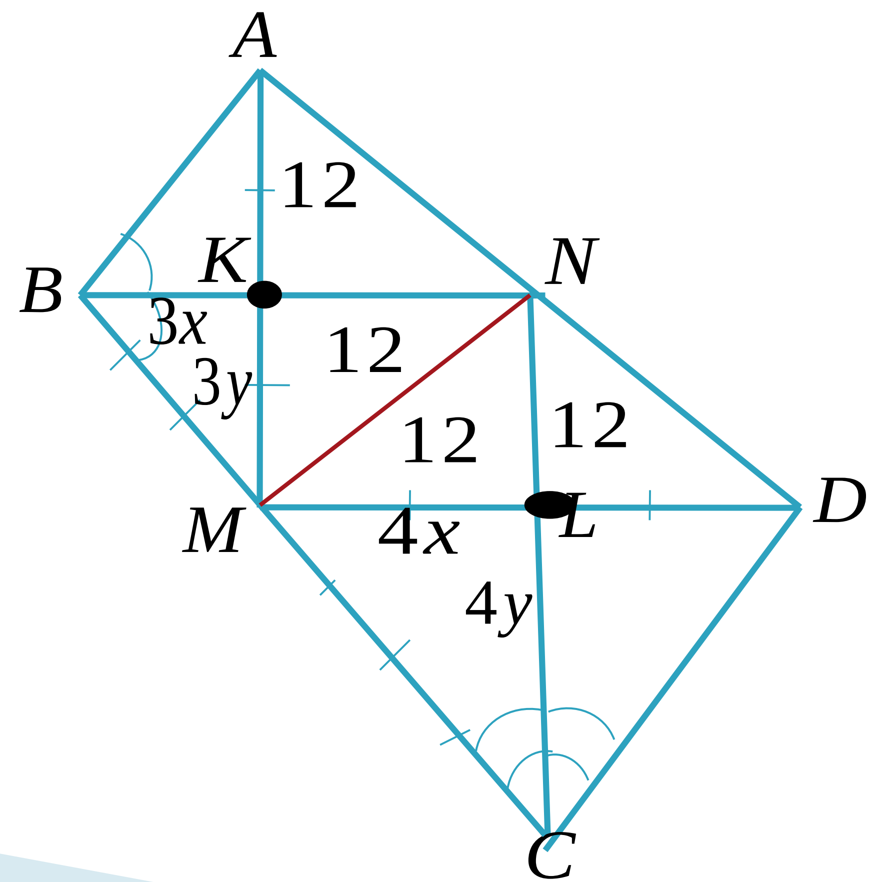
$$S_{AMBD}=S_{\Delta DBC}-S_{\Delta AMC}=192-108=84$$

# Задача 2 ( ЕГЭ)

Точка $M$ лежит на стороне $BC$ выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём $B$ и $C$ — вершины равнобедренных треугольников с основаниями $AM$ и $DM$ соответственно, а прямые $AM$ и $MD$ перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах $B$ и $C$ четырёхугольника $ABCD$, пересекаются на стороне $AD$.

б) Пусть $N$ — точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BM : MC = 3 : 4$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых $AM$, $DM$, $BN$ и $CN$, равна 24.



# Важная теорема 2

Площади треугольников, имеющих одинаковую высоту, относятся как основания, к которым проведена эта высота.

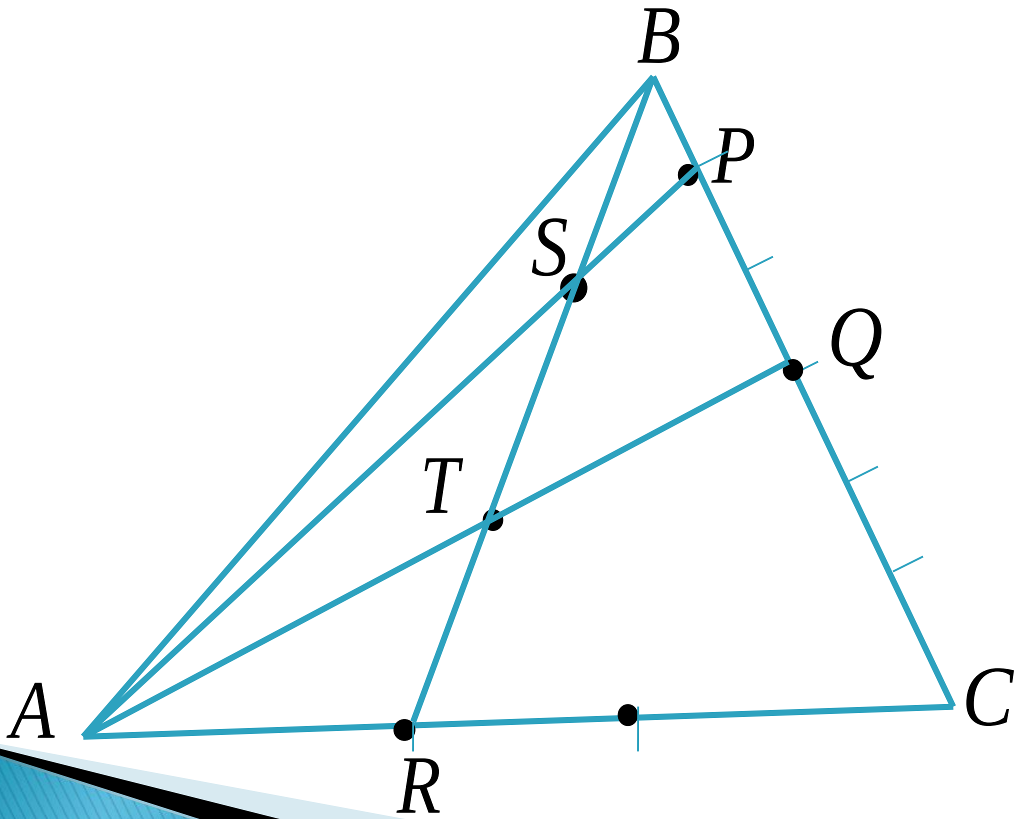
## Задачи для устной работы

# Задача 3( ЕГЭ)

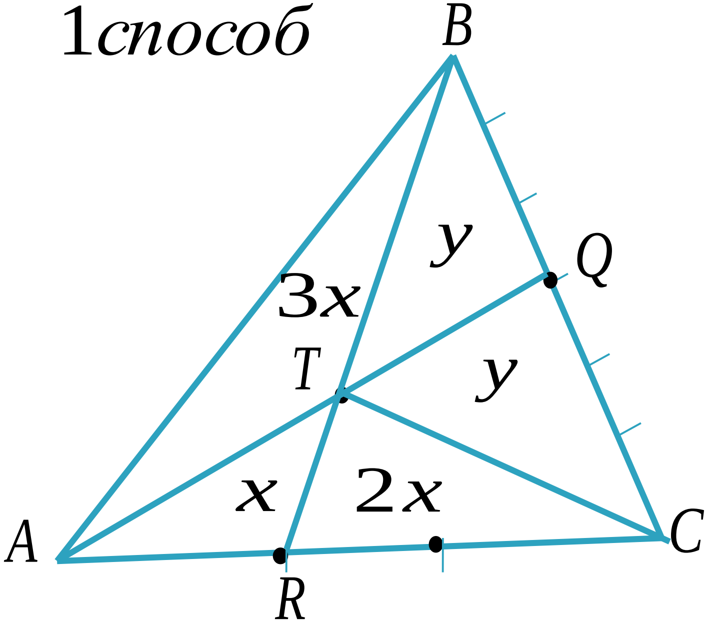
Точки P и Q расположены на стороне BC треугольника ABC так, что $BP:PQ:QC=1:2:3$. Точка R делит сторону AC этого треугольника так, что $AR:RC=1:2$. Точки S и T – точки пересечения прямой BR с прямыми AP и AQ соответственно.

а) Докажите, что площади треугольников ABS и AST равны

б) Найдите отношение площади четырехугольника PQTS к площади треугольника ABC.

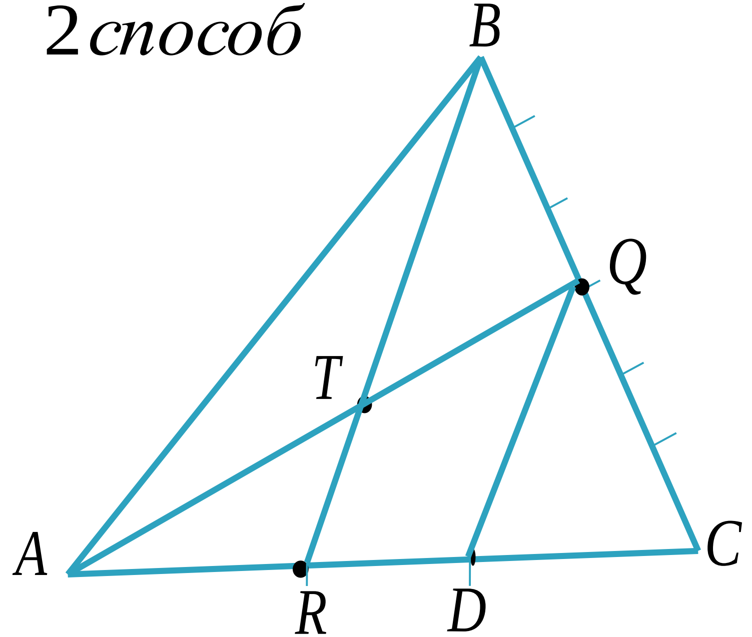


## 1 способ




$$\frac{RT}{TB}=\frac{1}{3}\Rightarrow RT=\frac{1}{4}BR$$

## 2 способ




$DQ$ – средняя линия $\Delta BRC \Rightarrow$

$$DQ=\frac{1}{2}BR$$

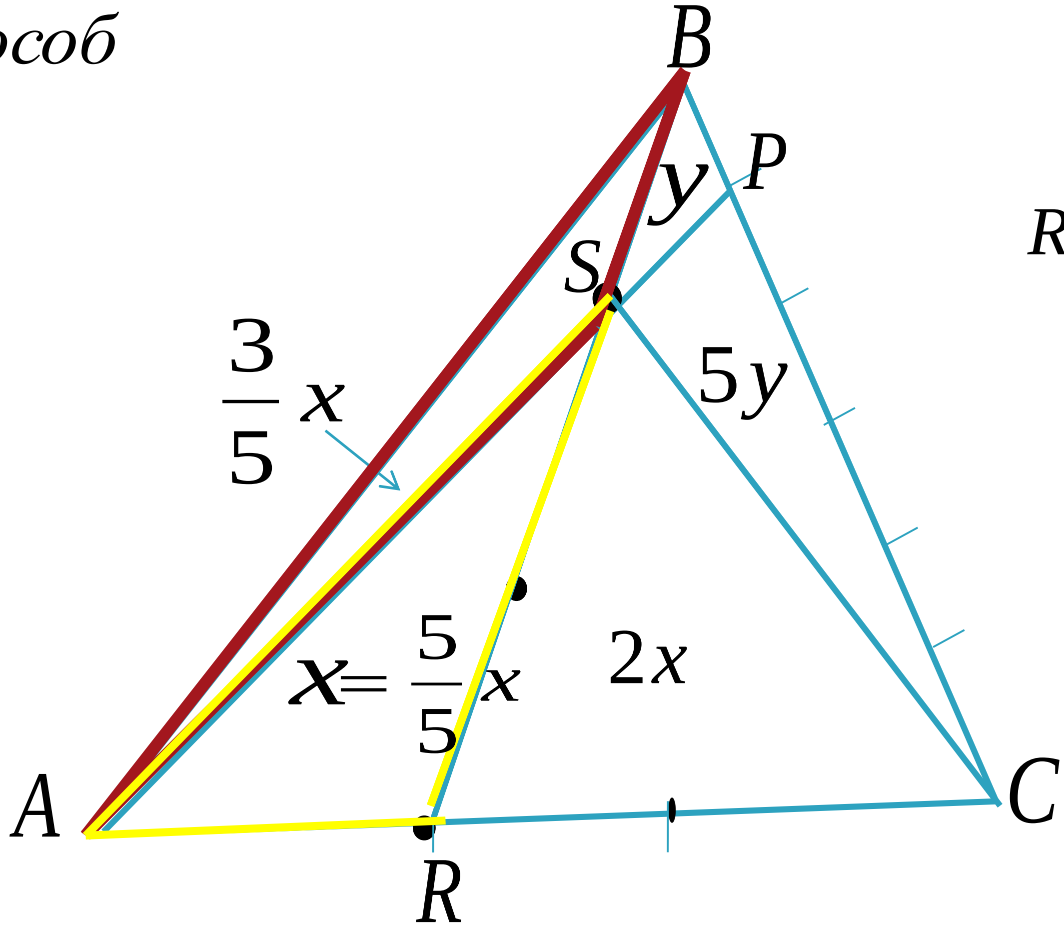
$TR$ – средняя линия $\Delta AQD \Rightarrow$

$$TR=\frac{1}{2}DQ$$

Таким образом, $TR=\frac{1}{4}BR$

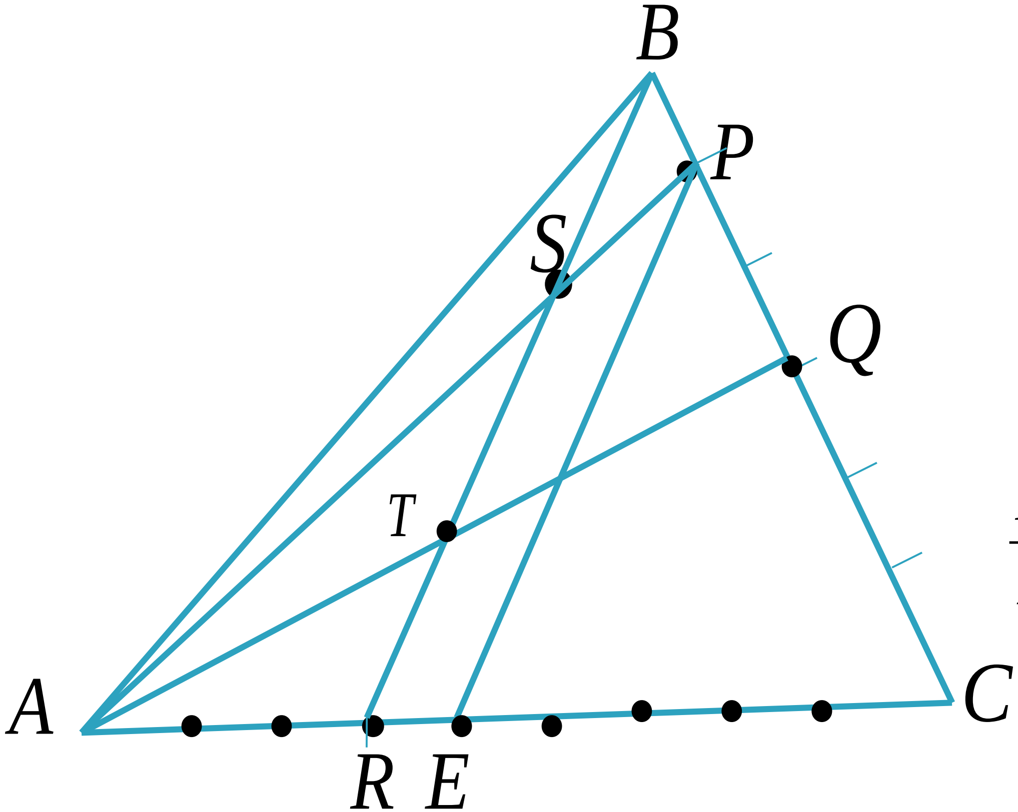
*Аналогично проводим рассуждения, определяя положение точки S*

1 *способ*




$$RS = \frac{5}{8}BR$$

*способ* 2




$$\frac{RS}{PE}=\frac{AR}{AE}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{PE}{BR}=\frac{CE}{CR}=\frac{5}{6}$$

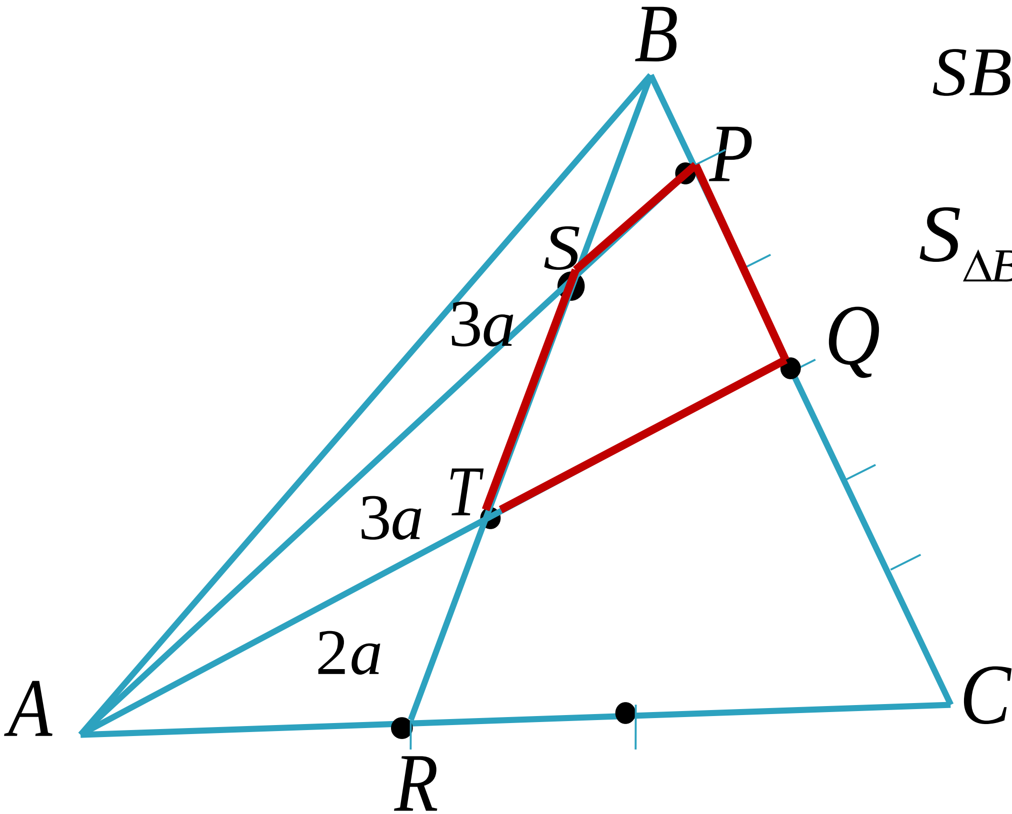
$$\frac{PE}{BR}\cdot\frac{RS}{PE}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{5}{8}\Rightarrow RS=\frac{5}{8}BR$$

$$TR=\frac{1}{4}BR$$

$$SB=BR-RS=BR-\frac{5}{8}BR=\frac{3}{8}BR$$

$$TS=RS-TR=\frac{5}{8}BR-\frac{1}{4}BR=\frac{3}{8}BR$$

$$\Rightarrow SB=TS\Rightarrow S_{\Delta ASB}=S_{\Delta AST}$$




$$SB = ST = \frac{3}{8}BR; TR = \frac{2}{8}BR$$

$$S_{\Delta BSA} = S_{\Delta SAT} = 3a; S_{\Delta ATR} = 2a$$

$$S_{\Delta ABC} = 3S_{\Delta ABR} = 24a$$

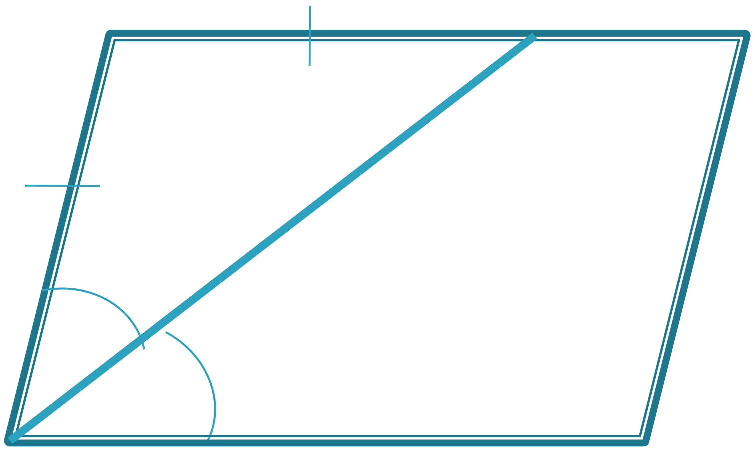
$$S_{\Delta APQ} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} = 8a$$

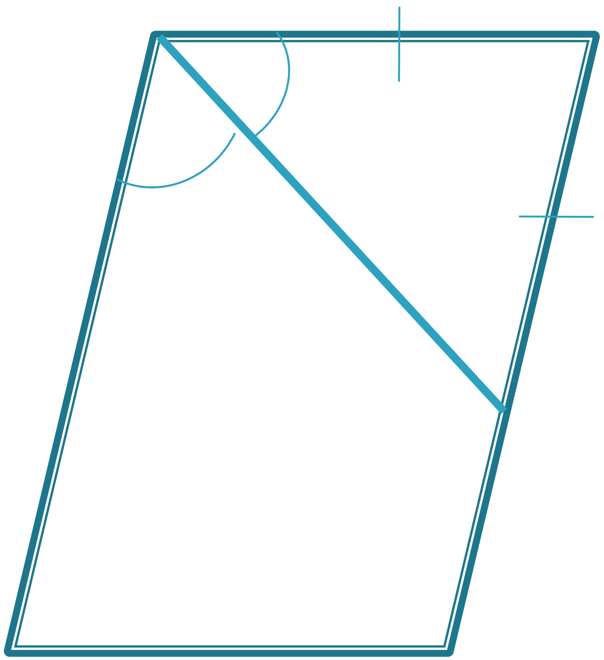
$$S_{TSPQ} = S_{\Delta APQ} - S_{\Delta AST} = 8a - 3a = 5a$$

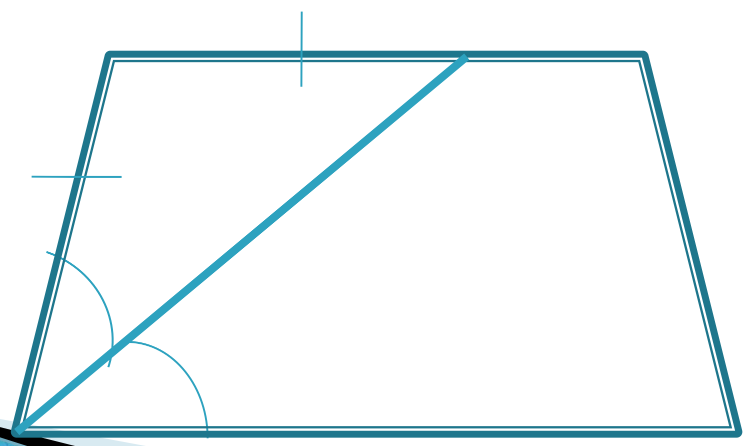
$$\frac{S_{TSPQ}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{5}{24}$$

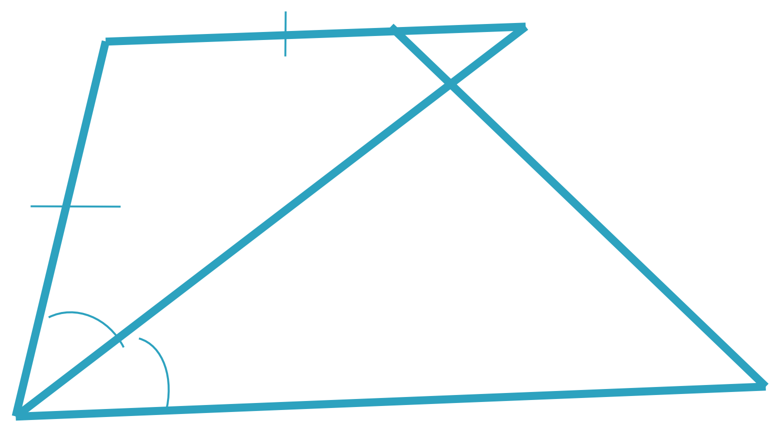
Важная теорема 3

Биссектриса угла параллелограмма(трапеции) отсекает от него равнобедренный треугольник.







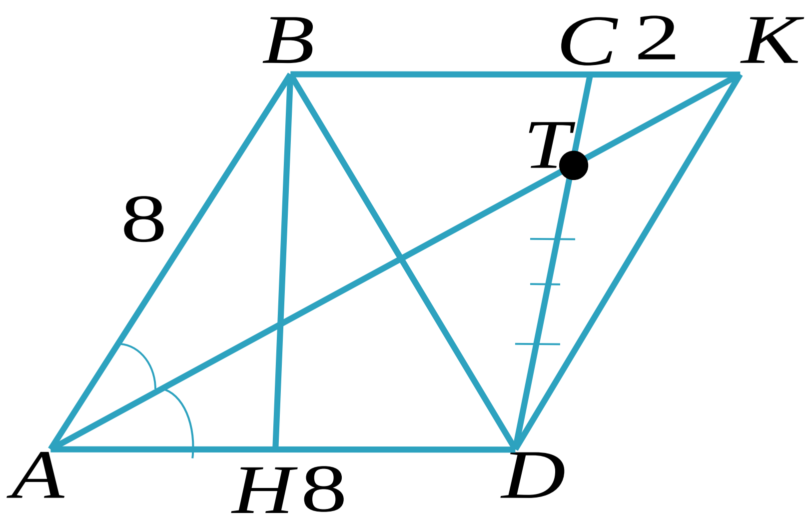


# Задача 4( ЕГЭ)

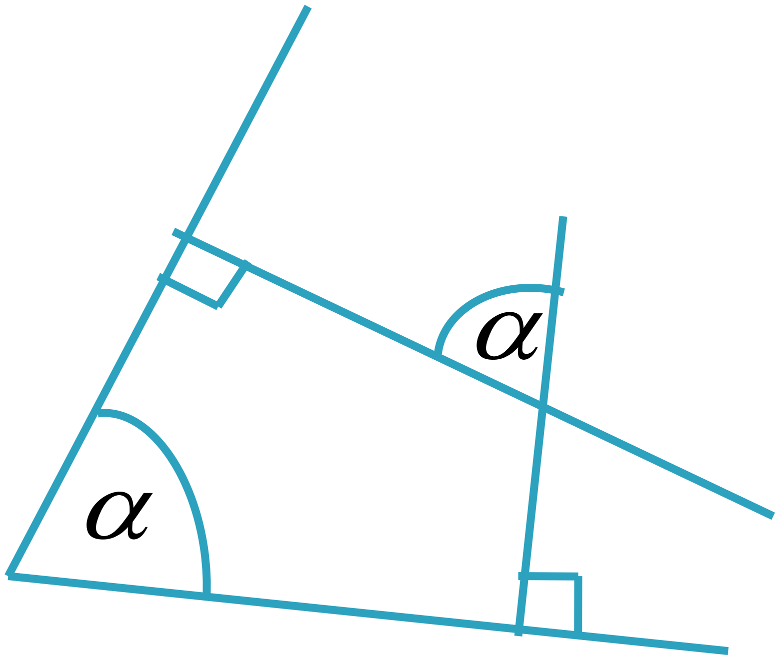
Биссектриса острого угла А трапеции ABCD пересекает боковую сторону CD в точке Т, а продолжение основания BC трапеции в точке К так, что ABKD – параллелограмм и TD:TC=4:1

а) Докажите, что $AK \perp BD$

б) Найдите площадь трапеции ABCD, если ее сторона $AB = 8$ и $\angle B = 120^0$



# Важная теорема 4

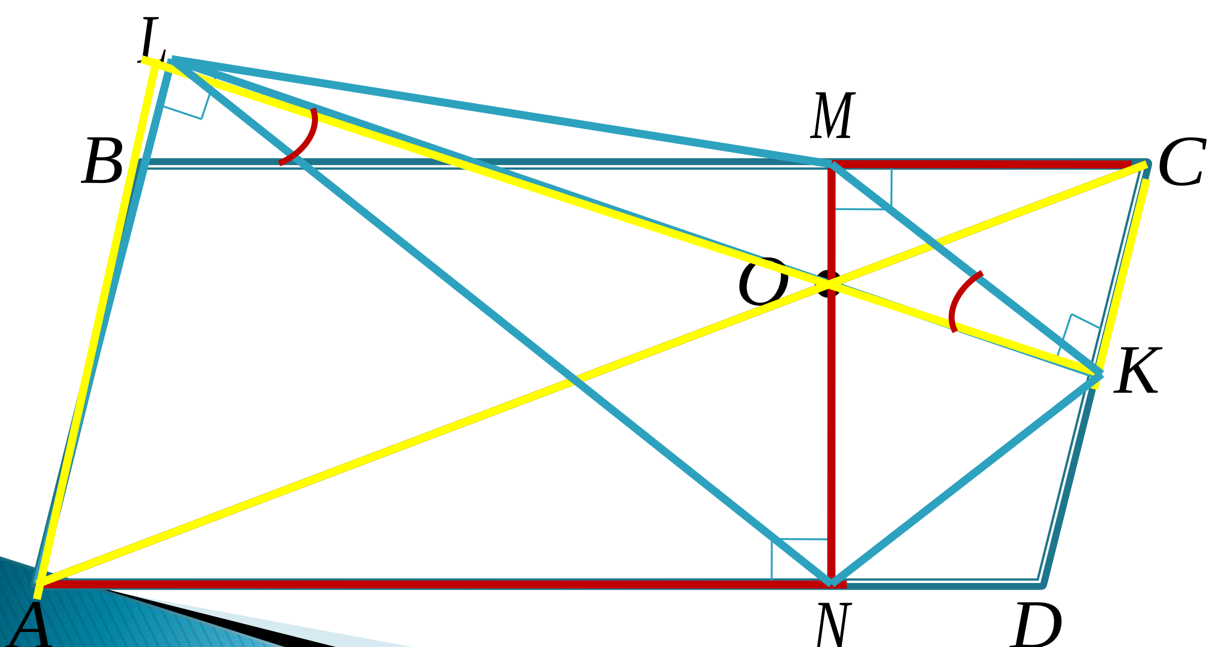


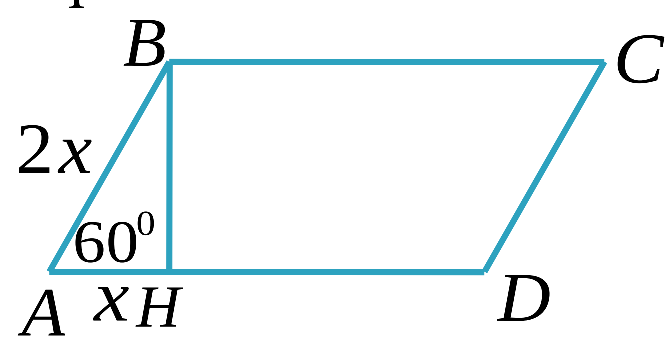
# Задача 5( ЕГЭ)

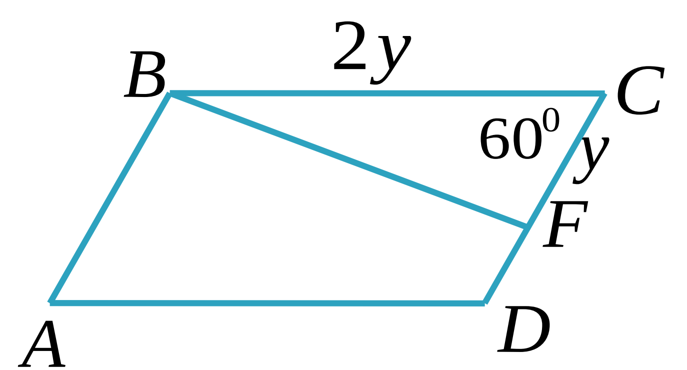
На диагонали параллелограмма взяли точку, отличную от её середины. Из неё на все стороны параллелограмма (или их продолжения) опустили перпендикуляры.

а) Докажите, что четырёхугольник, образованный основаниями этих перпендикуляров, является трапецией.

б) Найдите площадь полученной трапеции, если площадь параллелограмма равна 16, а один из его углов равен $60°$.



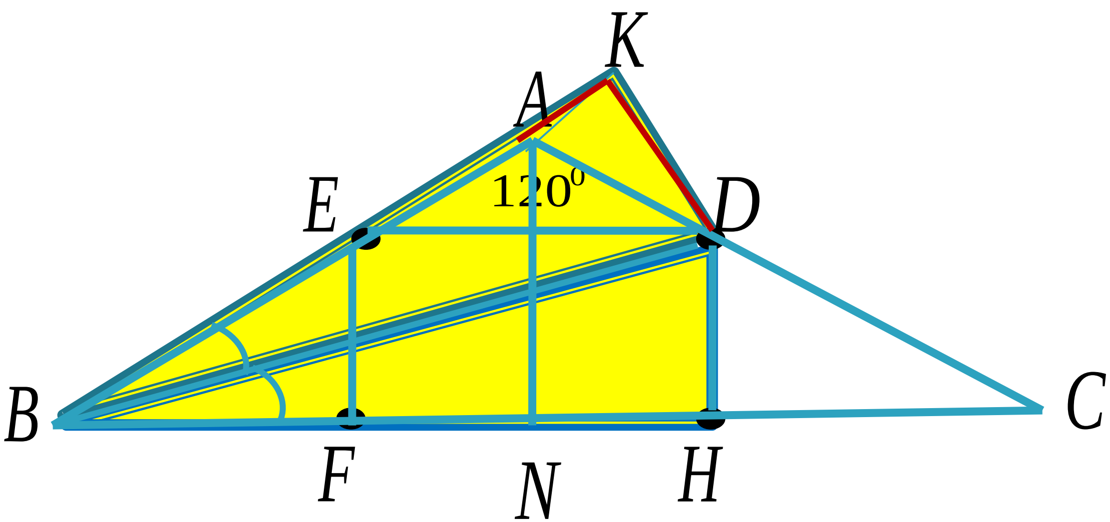



# Задача 6( ЕГЭ)

В равнобедренном треугольнике *ABC* с углом 120° при вершине *A* проведена биссектриса *BD*. В треугольник *ABC* вписан прямоугольник *DEFH* так, что сторона *FH* лежит на отрезке *BC*, а вершина *E* — на отрезке *AB*.

а) Докажите, что $FH = 2DH$.

б) Найдите площадь прямоугольника *DEFH*, если $AB = 4$.



## Задача 7( ЕГЭ)

Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$.

а) Докажите, что отрезки $LN$ и $KM$, соединяющие середины его противоположных сторон, делят друг друга пополам.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если $LM = 3\sqrt{3}$,

$KM = 6\sqrt{3}$, $\angle KML = 60^\circ$.